

# 大学編入学試験問題集（数学）

《類題作成 碓氷軽井沢 IC 数学教育研究所》

2015 年 3 月

目次		線形代数	38
基礎数学	2	8 ベクトル	38
1 基礎数学	2	9 行列	41
微分積分 I	2	10 行列式	43
2 微分	2	11 連立方程式	46
3 積分	8	12 線形変換	49
微分積分 II	18	13 固有値とその応用	50
4 級数	18	14 線形空間など	61
5 偏微分	21	応用数学	69
6 重積分	25	15 応用数学	69
7 微分方程式	30	確率統計	74
		16 確率統計	74

# 基礎数学

## 1 基礎数学

1.1  $\sqrt{15}$  は無理数である。以下の各問に答えよ。

(1)  $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$  を展開して整理せよ。

(2)  $\sqrt{3} - \sqrt{5}$  が無理数であることを示せ。

(3) 等式  $4a + (5b - 3)\sqrt{15} + \sqrt{15}(a - 2b\sqrt{15}) = 0$  を満たす有理数  $a, b$  の値を求めよ。

(群馬大類 26) (固有番号 s261501)

1.2 5つの球があり、1から5まで番号がついている。次の(1)から(3)に答えよ。

(1) 5つの球から3つを取り出す組合せは何通りか。

(2) 5つの球から3つを取り出し1列に並べる並べ方は何通りか。

(3) 5つの球を円形に並べる並べ方は何通りか。

(新潟大類 26) (固有番号 s262015)

1.3 半径  $a$  の円に内接する正三角形の面積を求めよ。

(新潟大類 26) (固有番号 s262016)

1.4 次の条件で定義される数列  $\{a_n\}$  の一般項とその極限值を求めよ。

$$a_1 = 0 \quad \text{および} \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}a_n$$

(福井大類 26) (固有番号 s262422)

1.5 以下の(a), (b), (c)を値が大きいものから順に答えよ。

(a)  $\log_2 3$ ,                      (b)  $\log_3 2$ ,                      (c)  $\log_4 4$

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265402)

1.6 直線  $ax - y + 1 = 0$  が曲線  $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$  とまったく交わずに済むような、実数  $a$  の範囲を示しなさい。

(宇都宮大類 26) (固有番号 s266101)

# 微分積分 I

## 2 微分

2.1  $f(x) = xe^{-x^2}$  とする。

(1)  $(1, f(1))$  における曲線  $y = f(x)$  の接線の方程式を求めよ

(2)  $0 < x$  における  $f(x)$  の最大値, 最小値を求めよ。

(北見工業大類 26) (固有番号 s260201)

2.2 次の不定形の極限を求めなさい。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

(秋田大類 26) (固有番号 s260402)

2.3 関数  $f(x)$  を  $x = a$  のまわりで定義された関数とし、その定義域を  $D$  とする。  $D$  のなかに  $a$  を含むある开区間  $I \subset D$  があり、  $x \in I, x \neq a$  ならば  $f(x) > f(a)$  となるとき  $f$  は  $x = a$  で極小値をとるといい、同様に、  $x \in I, x \neq a$  ならば  $f(x) < f(a)$  となるとき  $f$  は  $x = a$  で極大値をとるといふ。極小値をとるとき、または極大値をとるとき、極値をとるといふ。

以下の各問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x)$  の  $x = a$  での微分係数の定義を述べよ。
- (2) 関数  $f(x)$  は  $x = a$  で極値をとるとする。  $f$  が  $x = a$  で微分可能であるとき、  $f'(a) = 0$  となることを示せ。
- (3)  $g$  は  $(-\infty, \infty)$  で定義され  $C^2$ -級関数であるとする。  $g$  が  $x = 0$  と  $x = 1$  で極値をとるとき、ある  $0 < c < 1$  で  $g''(c) = 0$  となることを示せ。
- (4) 上問 (3) において  $g$  が  $x = 0$  と  $x = 1$  で共に極大値をとるとき、  $g''(x) = 0$  となるような  $x$  は开区間  $(0, 1)$  の中に少なくとも 2 つ存在することを示せ。

(お茶の水女子大類 26) (固有番号 s260601)

2.4 次の関数の極限値を求めなさい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \qquad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-x)}{x}$$

(千葉大類 26) (固有番号 s261201)

2.5 次の関数の極限に関する問いに答えよ。

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 6}{3x^2 - 2x - 8}$  を求めなさい。
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+e) - 1}{x}$  を求めなさい。ここで、  $e$  は自然対数の底である。

(千葉大類 27) (固有番号 s271201)

2.6 逆正接関数  $f(x) = \tan^{-1}x$   $\left(-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}\right)$  に関する以下の問いに答えよ。

- (1)  $y = \tan^{-1}x$  とおき、  $x = \tan y$  とすることで、  $\frac{dy}{dx}$  を  $y$  の関数として求めよ。
- (2)  $(1+x^2)f'(x) = 1$  が成り立つことを示せ。
- (3)  $f^{(n)}(x)$  に関する漸化式  $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$  が成り立つことを示せ。ただし、  $n$  は 1 以上の整数である。
- (4)  $f^{(n)}(0)$  に関する漸化式を解き、  $m$  を 0 以上の整数として  $f^{(2m)}(0)$  および  $f^{(2m+1)}(0)$  を求めよ。

(筑波大類 26) (固有番号 s261309)

2.7 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & 0 \leq x - [x] < \frac{1}{2} \\ 1 - (x - [x]) & \frac{1}{2} \leq x - [x] < 1 \end{cases}$$

で定義する。ただし  $[x]$  は  $x$  以下の最大の整数を表す。  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(2^k x)}{2^k}$$

とおく。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x)$  の、  $-1 \leq x \leq 1$  におけるグラフを描け。
- (2) 任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、  $g(x) \leq 1$  が成り立つことを示せ。

(3) 関数  $g(x)$  は連続であることを示せ.

(4) 自然数  $n$  に対して,  $g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n}$  を示せ.

(5) 関数  $g(x)$  は  $x = 0$  において微分不可能であることを示せ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261315)

2.8 次の極限值を求めなさい. ただし,  $a > 0, b > 0$  とする.

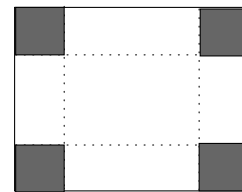
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(筑波大類 26) (固有番号 s261317)

2.9  $f(x) = \frac{x^5(2x^2 + 3)^4(4x + 5)^3}{(6x^3 + 7x + 8)^2}$ , ( $x > 0$ ) としたときの  $f'(x)$  を,  $(\log t)' = 1/t$  であることを使って計算せよ.

(埼玉大類 26) (固有番号 s261409)

2.10 図に示すように, 長方形の用紙の四つの角からそれぞれ 1 辺が  $x$  の正方形 (図の黒で示した部分) を切り取り, 図の点線で折り返して, ふたのない容器を作る. この容器の体積を  $f(x)$  とする. 長方形の二辺の長さをそれぞれ, 11, 17 としたとき, 以下の各問に答えよ.



(1) 切り取る正方形の一辺が  $(x + 1)$  のときと  $x$  のときの, 容器の体積の差を表す関数

$$g(x) = f(x + 1) - f(x) \text{ を求めよ.}$$

(2)  $x$  が整数値を取るときの  $g(x)$  の符号を調べ, 容器の体積が最大になる整数値  $x$  を求めよ.

(3)  $x$  が実数値を取るときに, 容器の体積が最大になる実数値  $x$  を求めよ.

(群馬大類 26) (固有番号 s261502)

2.11 次の関数を微分せよ.

$$y = \sin^{-1} x^2$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262006)

2.12 以下の極限值は存在するか, 存在すればその値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\log(1 - x)}$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262011)

2.13 次の関数を微分せよ. ただし,  $e$  は自然対数の底とする.

$$(1) (x^3 + 2x - 3)^4 \quad (2) \log_e(x^3 + 2) \text{ (ただし } x > 0) \quad (3) e^{3x+1} \quad (4) xe^{-3x} \quad (5) e^{\cos x}$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262013)

2.14 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{d}{dx} \frac{\sin(1 - x^{-1})}{(1 - x)^3} \quad (2) \frac{d}{dx} x^{x-2} \quad (x > 0) \quad (3) \frac{d}{dx} \left( 3^x \exp\left(\frac{1}{3-x}\right) \right)$$

(富山大類 26) (固有番号 s262301)

2.15 次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 2x - 8}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

(福井大類 26) (固有番号 s262401)

2.16 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$(2) y = xe^{-x^2}$$

(福井大類 26) (固有番号 s262402)

2.17 関数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$  の原点における微分可能性を調べよ.

(福井大類 26) (固有番号 s262404)

2.18  $y = x^3 - 3x$  の極大値と極小値を求めよ.

(福井大類 26) (固有番号 s262415)

2.19 次の等式が成り立つように、定数  $a$  と  $b$  の値を定めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + b}{x - 2} = 1$$

(福井大類 26) (固有番号 s262416)

2.20 以下の (1) および (2) の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$$

(福井大類 26) (固有番号 s262417)

2.21 次の (1) および (2) の関数を微分せよ.

$$(1) \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$(2) \cos^{-1} \frac{1}{x}$$

(福井大類 26) (固有番号 s262419)

2.22  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  とする. 関数  $f(x)$  のグラフ上の 2 点  $(2, f(2))$  と  $(4, f(4))$  を結ぶ直線の傾きが、点  $(a, f(a))$  における接線の傾きに等しくなる  $a$  の値を求めよ.

(福井大類 26) (固有番号 s262420)

2.23 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = (3x - 1)^3$$

$$(2) y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$(3) y = \log_e \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$(4) y = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$$

(三重大類 26) (固有番号 s263106)

2.24  $f(x) = x^2 + ax + b$  とするとき,

$$-1 < f(-1) < 1, \quad 0 < f(1) < 4$$

が成立する. このとき,  $f(x)$  の最小値  $m$  のとり得る値の範囲を求めよ.

(三重大類 26) (固有番号 s263108)

2.25 次の関数を微分して,  $f'(x)$  を求めなさい.

$$f(x) = \sin(3x + 2)$$

(三重大類 26) (固有番号 s263113)

2.26 実数  $a, b$  に対して関数  $f(x) = e^{-x} \cos x + ax + b$  を考える.  $f(x)$  は  $f(0) = 0, f'(0) = 0$  を満たすとする.

(1)  $a, b$  の値を求めよ.

(2) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^m}$  が存在し, その極限值が 0 とは異なるような正の整数  $m$  のうち最小のものを求めよ.

(京都工芸繊維大類 26) (固有番号 s263402)

2.27 正の実数  $x$  に対し  $f(x) = x^{x^x}$  と定義する.  $f'(x)$  を計算せよ.

(神戸大類 27) (固有番号 s273805)

2.28 以下の問いに答えよ.

(1)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$  とする.

(a)  $f(x)$  が  $\mathbb{R}$  で微分可能であることを示せ.

(b)  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  が  $x = 0$  で連続であるか否か理由もつけて答えよ.

(2)  $g(x)$  は开区間  $I \subset \mathbb{R}$  上の微分可能な関数とし,  $a, b \in I$  は  $a < b$  を満たすとする.

(a)  $g'(a) < 0 < g'(b)$  とする.  $g(x)$  は  $a < \xi < b$  を満たすある  $\xi \in \mathbb{R}$  で閉区間  $[a, b]$  での最小値をとることを示せ. また  $g'(\xi)$  を求めよ.

(b)  $g'(a) < k < g'(b)$  を満たす任意の  $k \in \mathbb{R}$  に対して,  $g'(\eta) = k, a < \eta < b$  を満たす  $\eta \in \mathbb{R}$  が存在することを示せ.

(c)  $g'(x)$  が  $I$  で狭義単調増加であるならば,  $g'(x)$  は  $I$  で連続であることを示せ.

(広島大類 27) (固有番号 s274105)

2.29 半径が 1 である半円に内接する長方形の最大面積を求めなさい.

(山口大類 26) (固有番号 s264303)

2.30  $\theta$  の範囲が  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき, 次の  $\theta$  の関数

$$y = \frac{1}{4}(\cos 2\theta)^2 - \frac{7}{3}(\sin \theta)^3 + \frac{3}{4}$$

の増減表を作成し, グラフの概形を描きなさい.

(山口大類 26) (固有番号 s264304)

2.31  $f(x) = \frac{x}{(\log x)^2}$  とする. 次の問いに答えよ.

(1) 極限值  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$  を求めよ.

(2) 区間  $(1, \infty)$  における関数  $y = f(x)$  の増減を調べ, そのグラフをかけ.

(3)  $D = \{(x, y) \mid x > 1, y = f(x)\}$  とする. 領域  $D$  における  $x + y$  の最小値を求めよ.

(愛媛大類 26) (固有番号 s264601)

2.32 自然数  $n$  に対して,  $f(x) = x^2 \log x$  の  $n$  次導関数  $f^{(n)}(x)$  を求めよ.

(九州大類 26) (固有番号 s264705)

2.33 次の関数  $f(x)$  の微分  $f'(x)$  を計算せよ.

(1)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$                       (2)  $f(x) = x \log_{10} x$

(佐賀大類 26)                      (固有番号 s264901)

2.34 次の関数の増減, 極値, 変曲点を調べてグラフを描け.

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

(佐賀大類 26)                      (固有番号 s264909)

2.35 関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  が,  $x = 1$  で極大値をとり,  $x = 2$  で極小値をとるように関数  $f(x)$  の係数  $a$  と  $b$  を決定せよ.

(大分大類 26)                      (固有番号 s265102)

2.36 関数  $y = x^{x^x}$  を  $x$  で微分しなさい.

(鹿児島大類 26)                      (固有番号 s265404)

2.37 以下の微分を計算せよ.

(1)  $\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{x}{2} \right) \right\}$                       (2)  $\frac{d}{dx} \left( \frac{e^x}{x^2+1} \right)$

(鹿児島大類 26)                      (固有番号 s265406)

2.38 次の微分を求めなさい.

$$\frac{d}{dx} [\cosh x^2] \quad (\text{ただし, } \cosh \text{ はハイパボリックコサインとする.})$$

(鹿児島大類 26)                      (固有番号 s265411)

2.39 次の関数の, 付記の区間での, 最大値, 最小値を求めなさい.

$$f(x) = \cos x + \sin^2 x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

(鹿児島大類 26)                      (固有番号 s265416)

2.40 次の関数を微分しなさい.

(1)  $f(x) = (2x-1)e^x$   
(2)  $f(x) = \log |\sin x| \quad (x \neq n\pi, n \text{ は整数})$   
(3)  $f(x) = x^x \quad (x > 0)$

(首都大類 26)                      (固有番号 s265904)

2.41  $y = \log(x^2+1)$  のとき,  $\frac{dy}{dx}$  および  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を求めよ.

(宇都宮大類 26)                      (固有番号 s266104)

2.42 下記の関数を  $x$  で微分しなさい.

(1)  $y = (\cos x + \sin x)^2$                       (2)  $y = (x-2)(x+3)^2$                       (3)  $y = x^x$                       (4)  $y = e^{1+x^2}$

(東京海洋大類 26)                      (固有番号 s266401)

### 3 積分

3.1 次の積分を求めよ.

$$(1) \int (3x - 1)^5 dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1) \sin x dx$$

(北見工業大類 26) (固有番号 s260202)

3.2 2つの曲線  $y = 4x - x^2$  と  $y = x - 4$  がある. このとき以下の設問 (1),(2) に答えなさい. なお, 解答はいずれも設問 (2) の下の空白部分に記入しなさい.

- (1) 上記の 2 直線で囲まれた図形を図示しなさい.
- (2) (1) の図形の面積を求めなさい.

(秋田大類 26) (固有番号 s260401)

3.3 関数  $f(x)$  を, 以下のように定義する.

$$f(x) = \frac{-ax^2 - (a-1)}{x^2 + 1} \quad (a \neq 0)$$

以下の問いに答えよ. ただし,  $y = f(x)$  は  $x$  軸と 2 つの交点  $A$  および  $B$  をもつものとする.

- (1)  $y = f(x)$  が  $x$  軸と 2 つの交点をもつ  $a$  の条件を示し, 交点  $A, B$  の  $x$  座標  $x_A, x_B$  (ただし  $x_A > x_B$ ) を求めよ.
- (2)  $y = f(x)$  の増減表を示し,  $y = f(x)$  のグラフの概形を描け.
- (3) 交点  $A, B$  における接線の方程式を求め, その接線 2 本の交点の座標を求めよ.
- (4)  $y = f(x)$  と  $x$  軸上の線分  $AB$  により囲まれる領域の面積  $S_1$  と, (3) で求めた 2 本の接線と  $x$  軸上の線分  $AB$  により囲まれる領域の面積  $S_2$  を求め,  $S_1$  と  $S_2$  の大小関係を示せ.

(東北大類 26) (固有番号 s260501)

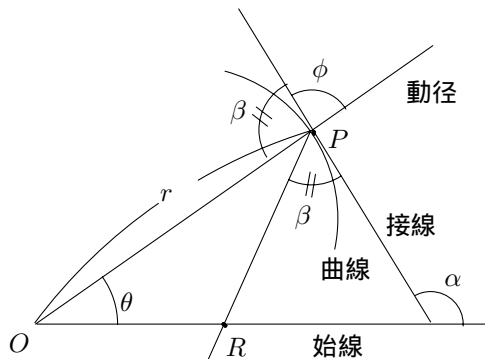
3.4 カージオイドと呼ばれる極座標形式で表された曲線  $r = 1 + \cos \theta$  について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 曲線の概形を図示せよ. ただし, 作図の根拠も示せ.
- (2) この曲線の全周囲長を求めよ. ただし,  $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$  という関係を用いても良い.
- (3) 下図に示すように, 曲線上の点  $P(r, \theta)$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) における接線と原点  $O$  から点  $P$  を結んだ直線 (動径) のなす角度を  $\phi$  とする. また, 接線と始線のなす角度を  $\alpha$  とする. このとき,  $\tan \phi = \tan(\alpha - \theta)$  であることを用い,

$$\tan \phi = \frac{r}{r'}$$

となることを示せ. ただし,  $r' = dr/d\theta$  である. また, これを用いて  $\phi$  を  $\theta$  で表せ.

- (4) 下図に示すように, 動径と接線のなす角度を  $\beta$  とする. 曲線上の点  $P(r, \theta)$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) で接線と角度  $\beta$  をなすもう一つの直線が始線と交わる点を  $R$  とする. このとき, 三角形  $OPR$  は二等辺三角形となることを示せ.





(東京大類 26) (固有番号 s260703)

3.5 (1)  $x$  が正の実数のとき  $F(x) = \int_0^{\infty} (12t + 1)e^{-xt} dt$  を  $x$  の式で表しなさい.

(2) (1) で求めた  $F(x)$  について  $\int_2^3 F(x) dx$  の値を求めなさい.

(東京農工大類 26) (固有番号 s260902)

3.6  $\int \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} dx$  を求めよ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261304)

3.7  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$  としたとき  $\int_0^1 y dx$  を求めよ.

(埼玉大類 26) (固有番号 s261410)

3.8 次の問に答えよ.

(1)  $t = \tan \theta$  のとき,  $\sin 2\theta$  を  $t$  を用いて表せ.

(2)  $t = \tan \theta$  と置換して, 不定積分  $\int \frac{d\theta}{1 + \sin 2\theta}$  を求めよ.

(信州大類 27) (固有番号 s271902)

3.9 以下の問に答えよ.

(1)  $F(\omega) = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt$  を求め,  $F(\omega)$  のグラフを描け.

(2)  $F'(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$  を  $\omega = 0$  以外で求めよ.

(3)  $y = \tan(a\omega)$  のグラフを, 横軸を  $a\omega$  軸, 縦軸を  $y$  軸とする座標平面に,  $-\frac{\pi}{2} \leq a\omega \leq \frac{5\pi}{2}$  の範囲で描け.

(4)  $F(\omega) = 0$  となる  $a\omega$  の値の位置を, 問 (3) で描いた座標平面に  $\bullet$  印で示せ.

(5)  $F'(\omega) = 0$  となる  $a\omega$  の値の位置を, 問 (3) で描いた座標平面に  $\odot$  印で示せ.

(新潟大類 26) (固有番号 s262004)

3.10 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-1}^1 (2x + 1)^2 dx$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262007)

3.11 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int (5x - 4) dx \quad (2) \int \sqrt{x^5} dx \quad (3) \int x \cos x dx$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262014)

3.12 空間に半径  $r$  の球が 2 つある. これらが共有点を持つとし, 中心の間の距離を  $2s$  とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つの球の共通部分の体積  $V$  を  $r, s$  で表しなさい.

(2)  $s = r^2$  の条件を満たして  $r, s$  が動くとき,  $V$  を最大にする  $r$  の値を求めなさい.

(長岡技科大類 25) (固有番号 s252103)

3.13  $xy$  平面上で原点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円を考える.  $A(r, 0)$  とし, 円周上に点  $B$  を  $\angle AOB = 30^\circ$  になるようにとる. 下の問いに答えなさい.

- (1) 扇形  $OAB$  を  $x$  軸を中心にして 1 回転させた回転体の体積  $V(r)$  を求めなさい.
- (2) 円弧  $AB$  を  $x$  軸を中心にして 1 回転させてできる曲面の面積  $S(r)$  を求めなさい.

(長岡技科大類 26) (固有番号 s262104)

3.14 実数  $\ell$  に対して, 連続関数  $f_\ell : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f_\ell(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \ell\theta}{\sin \theta} & (\theta \neq 0), \\ a & (\theta = 0) \end{cases}$$

と定める. 次の問いに答えよ.

- (1)  $a$  を求めよ.
- (2)  $f_\ell$  は  $\theta = 0$  で微分可能であることを示せ.
- (3) 積分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_\ell(\theta) d\theta$  の値を  $\ell = 2, 3$  の場合に求めよ.

(金沢大類 26) (固有番号 s262208)

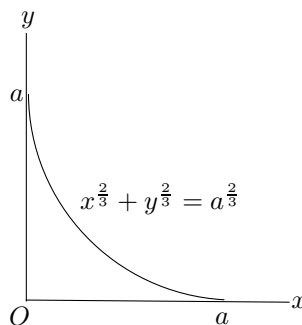
3.15 次の計算をせよ. ただし, (1) を解くにあたっては,  $x + \sqrt{x^2 + 5} = t$  なる変数変換を用い, 積分計算結果は  $x$  の式で表すこと.

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} dx \qquad (2) \int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

(富山大類 26) (固有番号 s262302)

3.16 曲線 :  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  ( $x \geq 0, y \geq 0, a > 0$ ) に関する次の問いに答えよ.

- (1) この曲線は  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  を満たす  $t$  を用いて,  $x = a \sin^3 t$  と表すことができる. 同様に  $y$  を  $t$  で表せ.
- (2) 曲線と  $x$  軸,  $y$  軸が囲む領域の面積を  $\pi$  と  $a$  を用いて表せ.



(富山大類 26) (固有番号 s262305)

3.17 次の関数を不定積分せよ.

$$(1) \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} \qquad (2) x^n \log_e x$$

(福井大類 26) (固有番号 s262405)

3.18  $y = \log x$  ( $1 \leq x \leq e$ ) と  $x$  軸の囲む部分を,  $x$  軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ.

(福井大類 26) (固有番号 s262406)

3.19 次の (1), (2) および (3) の関数の不定積分を求めよ.

(1)  $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$

(2)  $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$

(3)  $\frac{e^{3x}}{e^x - 1}$

(福井大類 26) (固有番号 s262421)

3.20 以下の不定積分を求めよ.

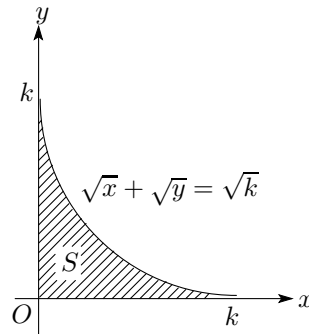
(1)  $\int x^{\frac{1}{2}} dx$

(2)  $\int \frac{\log x}{x} dx$

(2)  $\int e^x \cos x dx$

(福井大類 26) (固有番号 s262423)

3.21 (1) 下図に示される, 曲線  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$  ( $k \geq 0$ ) と  $x$  軸,  $y$  軸で囲まれる図形  $S$  の面積が  $\frac{1}{6}k^2$  となることを導け.



- (2) 曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$  と  $z$  軸に垂直な平面  $z = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) との交線の方程式を求めよ.  
 (3) 曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$  と  $xy$  平面,  $yz$  平面,  $zx$  平面で囲まれる立体  $V$  を,  $z$  軸に垂直な平面  $z = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) で切ったとき切り口は上の図形  $S$  と相似な形状となる. この切り口の面積が  $\frac{1}{6}(1 - \sqrt{t})^4$  と表されることを示せ.  
 (4) 立体  $V$  の体積を求めよ.

(豊橋技科大類 26) (固有番号 s262701)

3.22  $x - y$  平面上の 2 つの曲線  $y = f(x) = a - \cos 2x$  と  $y = g(x) = 2\sqrt{2} \sin x$  に関する以下の問いに答えよ. ただし,  $a$  は定数である.

- (1)  $f(x)$  と  $g(x)$  の導関数  $f'(x)$  と  $g'(x)$  を求めよ.  
 (2)  $f'(x) = g'(x)$  となる  $x$  を求めよ. ただし,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  とする.  
 (3) 2 つの曲線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  が  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  において接するとき,  $a$  の値を求めよ.  
 (4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき,  $x = 0$  かつ (3) の接点までの範囲で  $y$  軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ.

(豊橋技科大類 27) (固有番号 s272701)

3.23 以下の問いに答えよ.

(1) 定積分  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x} dx$  の値を求めよ.

(2) 関数  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  の導関数を求めよ.

(3)  $y = \frac{1}{2}x^2$  によって表される曲線の  $0 \leq x \leq 1$  の部分の長さを求めよ.

(名古屋大類 26) (固有番号 s262803)

3.24 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

(名古屋工業大類 26) (固有番号 s262901)

3.25 不定積分  $I = \int \frac{-x+2}{x^3+1} dx$  を求めよ.

(名古屋工業大類 27) (固有番号 s272902)

3.26 微分可能な関数  $f(x)$  が,  $f(x) = \cos^2(x) + \int_0^x f(t) \{\sin(x) \cos(t) - \sin(t) \cos(x)\} dt$  を満たすとき, 以下の問に答えなさい.

- (1) 与式の両辺を微分して  $f'(x)$  を求めなさい.
- (2)  $f''(x)$  を求めなさい.
- (3)  $f(0), f'(0), f''(0)$  をそれぞれ求めなさい.
- (4) 問 (1) ~ (3) の結果を用いて,  $\int_0^\pi f(x) dx$  を求めなさい.

(三重大類 26) (固有番号 s263101)

3.27 次の定積分を求めよ.

(1)  $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

(2)  $\int_0^2 \frac{x \log_e(1+x^2)}{1+x^2} dx$

(三重大類 26) (固有番号 s263107)

3.28 次の関数の不定積分を求めなさい.

$$\int \sin^5 x dx$$

(三重大類 26) (固有番号 s263113)

3.29 次の積分を求めよ. ただし,  $a$  は正の実定数である.

(1)  $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$

(2)  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

(3)  $\int_0^\infty e^{-ax} \cos x dx$

(奈良女子大類 26) (固有番号 s263202)

3.30  $xy$  平面上の曲線

$$C : y = x e^{-x}$$

について次の問に答えよ.

- (1)  $C$  上の点  $(a, a e^{-a})$  における  $C$  の接線の方程式を求めよ. ただし  $a$  は実数とする.
- (2)  $C$  上の点  $(1, e^{-1})$  における  $C$  の接線を  $l$  とする.  $C, l$  および  $y$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ.
- (3)  $y$  軸上の点  $(0, b)$  を通る  $C$  の接線がちょうど 2 本存在するための,  $b$  のみたすべき条件を求めよ.

(奈良女子大類 26) (固有番号 s263207)

3.31  $R^2$  に直交座標系  $O-xy$  をとり, 次式で定義される曲線  $C$  を考える.

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta + b \cos 2\theta \\ y &= a \sin \theta + b \sin 2\theta \end{aligned} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに,  $a, b$  は正の数であり,  $a \neq b$  を満たすものとする. このとき問 (1) ~ (3) に答えよ.

- (1)  $\Phi(\theta)$  は、次式を満たす連続関数であるとする。

$$(a \cos \theta + b \cos 2\theta) \tan \Phi(\theta) = a \sin \theta + b \sin 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき、 $\frac{d\Phi}{d\theta}$  を  $\theta$  の関数として求めよ。

- (2)  $a = 2, b = 1$  のとき、 $C$  の概形を描け。また  $\Phi(0) = 0$  であるとき、 $\Phi(2\pi)$  を求めよ。  
 (3)  $a = 2, b = 1$  のとき、次の積分を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

(京都大類 26) (固有番号 s263306)

- 3.32** 曲線  $C$  が媒介変数表示  $x = f(s), y = g(s), s \geq 0$  で表される。ただし、 $\cosh s = (e^s + e^{-s})/2$ ,  $\sinh s = (e^s - e^{-s})/2$  を用いて

$$f(s) = s - \frac{\sinh s}{\cosh s}$$

$$g(s) = \frac{1}{\cosh s}$$

と定義する。以下の設問に答えよ。

- (1) 定数  $b > 0$  に対して曲線  $C(b)$  が  $x = f(s), y = g(s), 0 \leq s \leq b$  で表される。 $C(b)$  の長さ  $\ell(b)$  を求めよ。  
 (2) 点  $P$  は時刻 0 で  $x = f(0), y = g(0)$  を出発して  $s$  が増える方向へ一定の速さで  $C$  上を移動する。時刻  $t > 0$  までに移動した経路の長さを  $t$  とする。時刻  $t$  における  $P$  の位置を  $x = f(\varphi(t)), y = g(\varphi(t))$  と表すための関数  $\varphi(t)$  を求めよ

(大阪大類 26) (固有番号 s263501)

- 3.33** (1) 整式  $x^4(1-x)^4$  を整式  $1+x^2$  で割った商と余りを求めよ。

(2) 定積分  $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$  を求めよ。

(3) 不等式  $\pi < \frac{22}{7}$  を示せ。

(4)  $0 < x < 1$  のとき、 $x(1-x) > \frac{1}{4}$  が成り立つことを用いて、不等式  $\pi > \frac{22}{7} \cdot \frac{1024}{1025}$  を示せ。

(岡山大類 26) (固有番号 s264002)

- 3.34**  $xy$  平面内で  $x^2 + 3y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$  を満たす領域の面積を求めよ。

(広島大類 26) (固有番号 s264102)

- 3.35** 次の積分  $I_n$  について以下の問いに答えよ。

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx \quad (n \text{ は零または正の整数})$$

- (1)  $I_0$  を求めよ。  
 (2)  $I_n$  と  $I_{n+1}$  の間に成り立つ漸化式を求めよ。  
 (3) 漸化式を利用することにより  $I_n$  を求めよ。

(広島大類 26) (固有番号 s264103)

3.36 関数  $f(x) = x^2(x-1)(4-x)$  を考える. 定積分

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

に関して, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $t = \sqrt{\frac{x-1}{4-x}}$  とするとき,  $x$  を  $t$  の関数として表し,  $\frac{dx}{dt}$  を計算せよ.
- (2) 定積分  $I$  において, 積分変数を  $x$  から  $t$  に変換せよ.
- (3) 定積分  $I$  の値を求めよ.

(広島大類 26) (固有番号 s264106)

3.37 以下の問いに答えよ.

- (1) 広義積分  $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$  の値を求めよ.
- (2)  $J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x}$  とおく.  $J$  を求めよ.
- (3) 定数  $C > 0$  と  $R > 0$  が存在して  $x \geq R$  ならば  $\log(1+x^2) < C\sqrt{x}$  となることを示せ.
- (4) 広義積分  $K = \int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$  の値を求めよ.

(広島大類 27) (固有番号 s274102)

3.38  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}} dx$ ,  $J = \int_0^1 \sqrt{-\log x} dx$  を考える. 次の問いに答えよ.

- (1)  $0 < x < 1$  において  $\sqrt{-\log x}$  を微分せよ.
- (2)  $J$  を  $I$  で表せ.
- (3)  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  を利用して  $J$  を求めよ.

(徳島大類 26) (固有番号 s264402)

3.39 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $x \neq 0$  のとき,  $f'(x)$  を求めよ.
- (2) 任意の実数  $x$  に対して,  $|f(x)| \leq x^2$  であることを示せ.
- (3)  $f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ.
- (4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x)$  を求めよ.

(高知大類 26) (固有番号 s264501)

3.40 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^3 - x - 1}{x^2 + 1} dx$$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_1^\infty \frac{2}{e^x - e^{-x}} dx$$

(愛媛大類 26) (固有番号 s264602)

3.41 定積分  $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$  の値を求めよ.

(九州大類 26) (固有番号 s264706)

3.42  $a > 1$  とする. 以下の各問いに答えよ.

(1) 曲線  $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$  ( $0 < x < 1$ ) の長さ  $L(a)$  を求めよ.

(2)  $a > 1$  における  $L(a)$  の最小値を求めよ.

(九州大類 26) (固有番号 s264707)

3.43 次の不定積分を求めよ. ただし, 積分定数は  $C$  とする.

(1)  $\int e^{ax} dx$  ( $a \neq 0$ )

(2)  $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$  ( $a \neq 0$ )

(佐賀大類 26) (固有番号 s264903)

3.44 次の  $v(t)$  で表される正弦波交流

$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

の実効値  $|V|$

$$|V| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t)^2 dt}$$

を求めよ. ここで  $\omega T = 2\pi$  とする.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264904)

3.45 (1) 曲線  $xy = 3$  と直線  $x + y = 4$  の交点の座標をすべて求めよ.

(2) 曲線  $xy = 3$  と直線  $x + y = 4$  で囲まれる図形を,  $x$  軸まわりに回転した回転体の体積  $V_x$  と  $y$  軸まわりに回転した回転体の体積  $V_y$  を求めよ.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264910)

3.46  $n \geq 1$  について  $I_n = \int_1^e x(\log x)^n dx$  とおく. ただし,  $\log x$  は自然対数とする.

(1) 部分積分法で  $I_1$  を求めよ.

(2) 部分積分法で  $I_{n+1}$  と  $I_n$  の関係式を求めよ.

(3)  $I_2, I_3$  の値を求めよ.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264914)

3.47 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int \frac{x+4}{x(x+1)} dx$

(2)  $\int \sin^2 x dx$

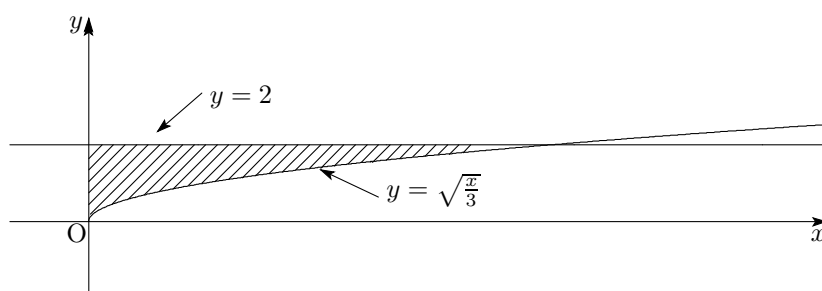
(3)  $\int xe^{2x} dx$

(大分大類 26) (固有番号 s265103)

3.48 直線  $y = 2$  と曲線  $y = \sqrt{x/3}$  と  $y$  軸によって囲まれる図形(下図の斜線部)の面積を求めたい. 以下の(1),(2)に答えよ.

(1) 斜線部の面積を求めるための手順を簡潔に説明せよ.

(2) 斜線部の面積を求めよ.



(鹿児島大類 26) (固有番号 s265401)

3.49 関数  $(\sin ax)(\sin bx)$  を  $x$  で積分しなさい。ただし、 $a, b$  は  $a \neq b$  で、0 でない定数とする。

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265405)

3.50 以下の積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 \frac{3x+2}{3x^2+4x+1} dx$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$$

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265407)

3.51 次の不定積分を求めなさい。

$$\int \frac{1}{x^2-6x+5} dx$$

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265412)

3.52 曲線  $y = \sin^{-1} x$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$  と直線  $y = \frac{\pi}{2}x$  について、以下の問いに答えなさい。ただし、 $\sin^{-1}$  はアークサインとする。

- (1) 上の曲線と直線が囲む領域を図示しなさい。
- (2) 曲線と直線の囲む領域の面積を求めなさい。

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265415)

3.53 次の不定積分を求めよ。

$$\int x^2 \cos x dx$$

(室蘭工業大類 26) (固有番号 s265503)

3.54 下記の関数  $f(x)$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $a$  は 0 でない定数であるとする。

$$f(x) = \frac{2}{4a^2 - x^2}$$

- (1) 関数  $f(x)$  を部分分数に分解した式を導出せよ。
- (2) 関数  $f(x)$  の不定積分を導出せよ。

(香川大類 26) (固有番号 s265702)

3.55 次の問いに答えよ。

- (1)  $I_n = \int_0^1 (\arcsin x)^n dx$  ( $n \geq 0$ ) とおく。  $t = \arcsin x$  において  $I_n$  を  $t$  の積分で表わせ。
- (2)  $n \geq 2$  のとき、 $I_n$  と  $I_{n-2}$  の関係を求めよ。さらに、 $I_2$  を求めよ。



(島根大類 26) (固有番号 s265804)

3.56 次の不定積分を求めなさい.

(1)  $\int \frac{1}{\sin x} dx$  (2)  $\int x (\log x)^2 dx$

(首都大類 26) (固有番号 s265907)

3.57 パラメータ  $t$  で表された曲線

$$C : \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$$

の長さ  $L(C)$  を求めよ.

(滋賀県立大類 26) (固有番号 s266001)

3.58  $\int e^{mx} dx$  を求めよ. なお,  $m$  は定数である.

(宇都宮大類 26) (固有番号 s266105)

3.59  $f(x) = e^x \sin x$  とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1)  $f(x)$  の  $0 \leq x \leq \pi$  における最大値を求めよ.

(2)  $\int_0^\pi f(x) dx$  を求めよ.

(はこだて未来大類 26) (固有番号 s266303)

3.60  $t$  を媒介変数として, 方程式

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される座標平面上の曲線を  $D$  とする. 以下の問いに答えよ.

(1)  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$  をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線  $D$  の接線のうち, 接点の  $x$  座標が  $\frac{27}{125}$  であるものを求めよ.

(3) 曲線  $D$  の長さを求めよ.

(はこだて未来大類 26) (固有番号 s266304)

3.61 下記の定積分, または不定積分を求めなさい.

(1)  $\int \frac{2}{2x-1} dx$  (2)  $\int 2^{3x} dx$  (3)  $\int x \cos x dx$  (4)  $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}} dx$

(東京海洋大類 26) (固有番号 s266402)

3.62 直線  $y = e$  と  $y = (1 - e)x + 1$  および曲線  $y = e^x$  で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(東京海洋大類 26) (固有番号 s266403)

3.63 次の不定積分を求めなさい.

$$\int x e^x dx$$

(和歌山大類 26) (固有番号 s266505)

# 微分積分 II

## 4 級数

4.1 以下の問いに答えよ.

(1) 次の条件を満たす数列  $\{a_n\}$  を求めよ.

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 7, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

(2) 次の条件を満たす数列  $\{b_n\}$  の極限を求めよ.

$$b_1 = 0, \quad b_{n+1} = \sqrt{b_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

(3) 次の条件を満たす  $c_2, c_3$  および  $c_4$  を求め、数列  $\{c_n\}$  を推定せよ. また、その推定が正しいことを、数学的帰納法によって証明せよ.

$$c_1 = 2, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{1 + c_n} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

(東北大類 26) (固有番号 s260503)

4.2 関数  $\varphi(x) = x \log x$  ( $x > 0$ ) について、次の問いに答えよ.

(1)  $\varphi'(x), \varphi''(x)$  を求めよ.

(2) テイラーの定理を適用して、 $\varphi(x)$  の  $x = 1$  における 1 次の近似式  $p(x)$  および剰余項  $R_2$  を求めよ.

(3) (2) の  $p(x)$  に対し、 $x > 0$  において  $\varphi(x) - p(x)$  が成り立つことを示せ.

(4) 閉関数  $[0, 1]$  で定義された正の値をとる連続関数  $f(x)$  が  $\int_0^1 f(x) dx = 1$  を満たすとする. このとき

$$\int_0^1 \varphi(f(x)) dx = 0$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大類 26) (固有番号 s262202)

4.3 次の問いに答えよ.

(1)  $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}$  を循環小数で表せ.

(2) マクローリンの定理を用いて、 $\left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right| \leq \frac{|x|^7}{7!}$  ( $x \in R$ ) を示せ.

(3)  $\frac{n}{1000} \sin 1 < \frac{n+1}{1000}$  を満たす自然数  $n$  を求めよ.

(富山大類 26) (固有番号 s262310)

4.4  $\sin(ax)$  をマクローリン級数展開せよ.

(福井大類 26) (固有番号 s262403)

4.5 テイラーの定理によって  $f(x, y) = x^2y + 4y - 5$  を  $(x - 1)$  と  $(y + 1)$  のべきで展開せよ.

(福井大類 26) (固有番号 s262407)

4.6  $\{a_n\}$  は数直線上の点  $A_n$  の座標に対応する数列であり、自然数  $n$  に対して  $A_n(a_n)$  は次のように帰納的に定められる。

線分  $A_n A_{n+1}$  を 2 : 1 に内分する点を  $A_{n+2}(a_{n+2})$  とする。ただし、 $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  とする。

以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_3, a_4, a_5$  の各項が、それぞれ  $\frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{20}{27}$  で与えられることを示せ。
- (2)  $a_{n+2}$  を、 $a_{n+1}$  および  $a_n$  を用いて表せ。
- (3) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求め、 $n \rightarrow \infty$  のときの  $a_n$  の値を示せ。

(岐阜大類 25) (固有番号 s252601)

4.7 次の漸化式で定義される数列を考える。

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4} \left( 3x_n + \frac{c^4}{x_n^3} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

数列  $\{x_n\}$  は収束することを示し、その極限値を求めよ。ただし、 $c$  は任意の正の定数である。

(名古屋大類 26) (固有番号 s262804)

4.8  $\log(1+x)$  のマクローリン級数展開を利用して  $\log(3+3x-6x^2)$  のマクローリン級数展開を求めよ。(収束する範囲は求めなくてよい。)

(名古屋工業大類 27) (固有番号 s272901)

4.9 以下の級数の収束、発散を判定せよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(奈良女子大類 26) (固有番号 s263206)

4.10 実数  $x \in \mathbb{R}$  に対し

$$f_n(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^n} \right|$$

と定義する。 $\mathbb{Z}$  は整数全体の集合である。次の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f_0, f_1, f_2$  のグラフの概形を書け。
- (2) 各  $x \in \mathbb{R}$  に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{*}$$

は収束することを示せ。

- (3) (\*) で与えられる  $x \in \mathbb{R}$  の関数  $S(x)$  は  $\mathbb{R}$  上で一様連続であることを示せ。

(神戸大類 27) (固有番号 s273807)

4.11  $z$  は  $|z| = 1, z \neq 1$  を満たす複素数とする。このとき、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots \tag{*}$$

が(ある複素数に)収束することを示したい。以下の問いに答えよ。非負整数  $n$  に対し

$$S_n = \sum_{k=0}^n z^k \text{ とおく。}$$

- (1) 非負整数  $n$  に対し  $|S_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$  であることを示せ。

(2)  $m > n$  であるような正の整数  $m, n$  に対し次が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=n}^m \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1),(2) を用いて, 以下の条件 (C) が成り立つことを示せ.

任意の正の実数  $\varepsilon$  に対し, 正の整数  $N$  が存在して,  
 $m > n \geq N$  であるような任意の整数  $m, n$  に対して

$$\left| \sum_{k=n}^{m-1} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon \text{ が成り立つ.} \quad (C)$$

(コーシーの収束条件定理によれば, 条件 (C) は級数 (\*) の収束と同値であるため, (3) より級数 (\*) の収束が証明できることになる.)

(神戸大類 26) (固有番号 s263810)

4.12 ベキ級数  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$  について以下の問いに答えよ.

(1) 収束半径  $r$  を求めよ.

(2)  $|x| < r$  に対して

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$$

とする. 第 2 次導関数  $f''(x)$  を  $x$  の有理式で表せ.

(3)  $f(x) = (1-x) \log(1-x) + x - \frac{x^2}{2}$  を示せ.

(岡山大類 26) (固有番号 s264001)

4.13 一般項  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  をもつ数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  に関して, 以下の問いに答えよ.

(1)  $n = 1, 2, \dots$  および  $k = 0, \dots, n$  に対し,  ${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  とする. このとき, 不等式

$$\frac{{}_n C_k}{n^k} \leq \frac{{}_{n+1} C_k}{(n+1)^k}$$

が成り立つことを示せ.

(2)  $n = 1, 2, \dots$  に対し,  $a_n < a_{n+1}$  を示せ.

(3) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は上に有界であることを示せ.

(4) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束することを示せ.

(広島大類 26) (固有番号 s264108)

4.14  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4}{a_n + 4}$  で定義される数列について, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数  $n$  に対して,  $\frac{4}{5} \leq a_n \leq 1$  を示せ.

(2)  $b_n = a_{n+1} - a_n$  とする. 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  が収束することを示せ.

(3) 数列  $\{a_n\}$  が収束することを示し, 極限値を求めよ.

(広島大類 27) (固有番号 s274104)

4.15 次の問いに答えよ,

(1)  $(1+x)^{1/10}$  のマクローリン級数を  $x^3$  の項まで求めよ.

(2)  $(1.2)^{1/10}$  の近似値を小数第 3 位まで正確に求めよ.

(島根大類 26) (固有番号 s265803)

4.16 次の文章中の  $\boxed{\text{①}}$  ~  $\boxed{\text{⑤}}$  に入れるのに最も適当な分数を答えなさい.

(1)  $\frac{1}{\cos x}$  のマクローリン展開を  $x^4$  の項まで求めると,  $1 + \boxed{\text{①}}x^2 + \boxed{\text{②}}x^4$  が得られる.

(2)  $\tan x$  のマクローリン展開を  $x^5$  の項まで求めると,  $x + \boxed{\text{③}}x^3 + \boxed{\text{④}}x^5$  が得られる.

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$  の極限值は,  $\boxed{\text{⑤}}$  である.

(首都大類 26) (固有番号 s265906)

4.17 指数関数と三角関数のマクローリン級数を利用して, 次の極限を求めなさい.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x - \sin x}$$

(和歌山大類 26) (固有番号 s266504)

## 5 偏微分

5.1  $z = x \cos(xy)$  とする. 偏導関数  $z_x, z_y$  を求めよ.

(北見工業大類 26) (固有番号 s260203)

5.2 2変数関数

$$f(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

の極値を全て求めよ.

(東京工業大類 26) (固有番号 s260801)

5.3  $x^2 + y^2 = 1$  のとき, 関数  $f(x, y) = x^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2x$  の最大値と最小値を求めなさい.

(東京農工大類 26) (固有番号 s260901)

5.4 2変数関数  $f(x, y) = 2x^3 + 3xy + 3y^2$  について, 次の問いに答えなさい.

(1)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$  を満たす点  $(x, y)$  をすべて求めなさい.

(2)  $z = f(x, y)$  の極値を求めなさい.

(東京農工大類 27) (固有番号 s270901)

5.5 次の関数  $f(x, y), g(x, y)$  に対して, 以下の問いに答えよ.

$$f(x, y) = xy(1 - x - y), \quad g(x, y) = 3x^3 + y^3 + 2x^2y$$

(1) 関数  $f(x, y)$  の極値を求めよ.

(2) 曲線  $g(x, y) = 0$  上の点  $(1, -1)$  における接線の方程式を求めよ.

(電気通信大類 26) (固有番号 s261003)

5.6 偏微分可能な  $f(x, y)$  が  $f(cx, cy) = c^n f(x, y)$  を満たしているとする. この時,  $x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  を  $f(x, y)$  の偏導関数を用いずに示せ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261303)

5.7  $k$  を 2 以上の自然数とし,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\}$  上で定義された関数  $f(x, y) = x^x + xy^k$  を考える.

- (1)  $f_x = f_y = 0$  を満たす点を求めよ.
- (2)  $k = 2$  のとき, (1) で求めた点で関数  $f$  は極値をとるかどうかを判定せよ.
- (3)  $k = 3$  のとき, (1) で求めた点で関数  $f$  は極値をとるかどうかを判定せよ.

(埼玉大類 26) (固有番号 s261407)

5.8 2 変数関数  $f(x, y) = x^3 + xy + \frac{1}{2}y^2$  の極値を求めよ.

(茨城大類 26) (固有番号 s261701)

5.9  $xy$  平面上で定義された関数  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$  について, 次の問いに答えよ.

- (1) 偏導関数  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$  を求めよ. また, 第 2 次偏導関数  $f_{xx}(x, y)$ ,  $f_{xy}(x, y)$ ,  $f_{yy}(x, y)$  を求めよ.
- (2)  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$  を満たす点  $(x, y)$  をすべて求めよ.
- (3) 関数  $f(x, y)$  の極値を求めよ.

(信州大類 26) (固有番号 s261901)

5.10 次の極限を調べ, それが存在する場合は極限值を求め, 存在しない場合はその理由を述べよ.

- (1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2 - 2}$
- (2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + y^4}$
- (3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^3 + y^3 - 1}{(x^2 - 1)^3 - y + 1}$

(信州大類 27) (固有番号 s271901)

5.11 次の 2 変数関数  $f(x, y)$  について, 偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  をそれぞれ求めよ.

$$f(x, y) = \sin^2(x + y) \cos(x + y)$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262001)

5.12  $xy$  平面上の関数

$$f(x, y) = x^3 y^2 - y^3 - x^4$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) 偏導関数  $f_x$ ,  $f_y$  の値が共に 0 となる点をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた点での  $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$  の値を求めよ.
- (3)  $f$  は極値をとらないことを示せ.

(金沢大類 26) (固有番号 s262207)

5.13 以下の関数  $f(x, y)$  に関して,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  及び  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  を求めよ.

- (1)  $f(x, y) = x^2 y^5$
- (2)  $f(x, y) = e^{-2y} \sin 3x$

(福井大類 26) (固有番号 s262424)

5.14 2次元ラプラス方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  について、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  が2次元ラプラス方程式を満たすことを示せ。
- (2) 関数  $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$  が2次元ラプラス方程式を満たすことを示せ。また、境界条件を円  $x^2 + y^2 = 4$  上で  $u = 0$ , 円  $x^2 + y^2 = 9$  上で  $u = 5$  としたとき、境界条件を満たすように  $a$  と  $b$  の値を求めよ。

(名古屋大類 26) (固有番号 s262801)

5.15  $a, b$  を定数とし、 $f(x, y) = x^3 + axy^2 + x^2 + by^2$  とする。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

がつねに成り立っているとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  の値を定めよ。
- (2)  $f(x, y)$  の極値を調べよ。

(名古屋工業大類 26) (固有番号 s262903)

5.16  $x^2 - 4xy + 2y^3 + 6 = 0$  で定まる陰関数  $y = y(x)$  の極値を求めよ。

(名古屋工業大類 27) (固有番号 s272903)

5.17 次の微分を求めよ。ただし、 $a$  は実定数である。

$$(1) \frac{d}{dx} \tan^{-1}(ax) \qquad (2) \frac{d}{dx} (x^2 e^{-ax}) \qquad \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(奈良女子大類 26) (固有番号 s263201)

5.18 関数  $f(x, y) = e^{x+2y} + e^{-x-2y} + \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$  を考える。

- (1) 偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ , を求めよ。
- (2) 関数  $f(x, y)$  の極値を求めよ。

(京都工芸繊維大類 26) (固有番号 s263403)

5.19 以下の問に答えよ。

- (1)  $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{4}(x+y)^4$  とするとき、関数  $z = f(x, y)$  の極値を求めよ。
- (2)  $f(x, y) = y(x+y)^2$  とするとき、関数  $z = f(x, y)$  の極値を求めよ。

(神戸大類 26) (固有番号 s263803)

5.20  $u = \log(e^x + e^y + e^z)$  のとき次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2e^{x+y+z-3u}$$

(神戸大類 26) (固有番号 s263808)

5.21 2変数関数  $f(x, y) = e^x(x+y^2)$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $f_x(a, b) = 0$  かつ  $f_y(a, b) = 0$  を満たす  $(a, b)$  を求めよ。
- (2) (1) で求めた  $(a, b)$  について、 $f_{xy}(a, b)^2 - f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b)$  を計算せよ。

- (3)  $f(x, y)$  が極値を持つなら, その値は極大値か極小値かを述べ, その値を求めよ. 持たないなら, その理由を述べよ.

(高知大類 26) (固有番号 s264502)

- 5.22 関数  $f(x, y) = x^2 + 2txy + y^2 + 2x + 2y$  が極値をもつような定数  $t$  の範囲を求めよ. また, そのときに極値を与える点の座標と極値を求めよ.

(愛媛大類 26) (固有番号 s264603)

- 5.23 (1)  $u = f(x, y)$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  ( $r > 0$ ) とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a)  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$  を  $r, \theta$  および,  $u$  の  $r, \theta$  に関する偏導関数を用いて表せ.

(b)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  を  $r, \theta$  および,  $u$  の  $r, \theta$  に関する偏導関数を用いて表せ.

- (2) 領域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  において, 関数  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  を考える. 以下の問いに答えよ.

- (a) 領域  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  における  $f(x, y)$  の極値とそれを与える  $(x, y)$  を求めよ. 極大か極小かも述べよ.

- (b) 単位円  $x^2 + y^2 = 1$  上での  $f(x, y)$  の最大値, 最小値とそれらを与える  $(x, y)$  を求めよ.

- (c) 領域  $D$  における  $f(x, y)$  の最大値, 最小値とそれらを与える  $(x, y)$  を求めよ.

(九州大類 26) (固有番号 s264704)

- 5.24 全微分可能な 2 変数関数  $z = f(x, y)$  が  $\frac{\partial z}{\partial x} = x\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = y\sqrt{x^2 + y^2}$  を満たすとする.  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  のとき,  $\frac{\partial z}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$  を求めよ.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264913)

- 5.25  $x^2 + xy + 2y^2 = 1$  なる式から定まる陰関数  $y$  について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 導関数  $\frac{dy}{dx}$  を求めなさい.

(2) 2 次導関数  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を求めなさい.

(熊本大類 26) (固有番号 s265201)

- 5.26  $x$  と  $y$  について何回でも偏微分可能な 2 変数関数  $f(x, y)$  に対し,

$$x = x(u, v) = u \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y = y(u, v) = u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

を代入して, 合成関数  $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  を作る. ここで,  $\alpha$  は実数の定数とする. これについて, 次の各問に答えよ. ただし, 以下では関数の引数を省略しており, 例えば  $\frac{\partial g}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  は, それぞれ  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))$  の意味である.

(1) 等式  $\frac{\partial g}{\partial u} = a_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \frac{\partial f}{\partial y}$  を満たす定数  $a_1, a_2$  を求めよ.

(2) 等式  $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  を満たす定数  $b_1, b_2, b_3$  を求めよ.

(3) 等式  $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = c_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  を満たす定数  $c_1, c_2, c_3$  を求めよ.

(宮崎大類 26) (固有番号 s265305)



5.27 下記の関数  $f(x, y)$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $\alpha$  と  $\beta$  はそれぞれ正の定数であるとする。

$$f(x, y) = \cos \alpha x e^{-\beta y}$$

(1) 偏導関数  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  と  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$  をそれぞれ導出せよ。

(2) 求めた偏導関数に関して、 $x = \frac{\pi}{2\alpha}$ ,  $y = \frac{1}{\beta}$  における偏微分係数をそれぞれ求めよ。

(香川大類 26) (固有番号 s265701)

5.28 関数  $z = f(x, y)$  の  $x$  と  $y$  が  $r$  と  $\theta$  の関数で  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  の関係にあるとき、 $\frac{\partial z}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$  を求めよ。

(宇都宮大類 26) (固有番号 s266107)

## 6 重積分

6.1 次の立体について、以下の問いに答えなさい。

曲面  $x^2 + y^2 = z^2$ , 平面  $z = 0$ , 平面  $z = 1$  で囲まれた立体

(1) この立体を図示しなさい。

(2) この立体の体積  $V$  は、次の重積分で表せる。  $\boxed{\text{(ア)}}$ ,  $\boxed{\text{(イ)}}$  にあてはまる式を答えなさい。

$$V = \iint_D \left(1 - \boxed{\text{(ア)}}\right) dx dy \quad D = \left\{ (x, y) \mid \boxed{\text{(イ)}} \right\}$$

(3) (2) の重積分を極座標になおして、この立体の体積を求めなさい。

(岩手大類 26) (固有番号 s260303)

6.2 2つの円柱  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) の共有部分の体積  $V$  を求めよ。

(東京工業大類 26) (固有番号 s260802)

6.3 2重積分  $\iint_D xy dx dy$ ,  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, \frac{x^2}{9} \leq y \leq \sqrt{4-x} \right\}$  の値を求めなさい。

(東京農工大類 27) (固有番号 s270902)

6.4 次の重積分の値を求めよ。

(1)  $\iint_D y dx dy$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(2)  $\iint_D (x - y)^2 \cos^2(x + y) dx dy$ ,  $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq \pi\}$

(電気通信大類 26) (固有番号 s261004)

6.5 三次元空間  $O - xyz$  座標系で、円柱  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) が2つの平面  $z = bx$  ( $b > 0$ ) と  $z = 0$  とで切り取られる立体について、以下の問に答えなさい。

(1) 立体を図示しなさい。

(2)  $xy$  平面上に極座標系  $(r, \theta)$  をとって、 $O - r\theta z$  円柱座標系で見た場合、 $z$  軸を通る  $\theta$  平面と  $\theta + d\theta$  平面とで立体が切り取られる体積  $dV$  を求めなさい。

(3) 立体の体積  $V$  を求めなさい。

(千葉大類 26) (固有番号 s261203)

6.6 三次元空間の  $O - XYZ$  座標系で与えられた, 放物面  $z = 1 + \sqrt{2} - x^2 - y^2$ , および, 二葉双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  について, 以下の間に答えなさい.

- (1) 放物面と二葉双曲面との交線の式を求めなさい.
- (2) 放物面が二葉双曲面に挟まれる部分の概形を図示しなさい.
- (3) 放物面  $z = 1 + \sqrt{2} - x^2 - y^2$  と二葉双曲面上半分  $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$  とで囲まれる部分の体積  $V$  を求めなさい.

(千葉大類 27) (固有番号 s271203)

6.7 半径  $a$  の球体の領域  $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$  を積分領域とする定積分  $\iiint_D z^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$  の値を以下の問いに従って求めよ.

- (1)  $x, y, z$  を極座標  $r, \theta, \varphi$  の関数として表せ.  $r, \theta, \varphi$  の定義を図示すること.
- (2)  $x, y, z$  の  $r, \theta, \varphi$  の関するヤコビアンを計算せよ.
- (3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261310)

6.8 3次元空間  $\mathbb{R}^3$  において, 曲面  $z = 5x^2 + 4xy + 8y^2$  と平面  $z = 1$  によって囲まれた図形の体積を求めよ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261314)

6.9 次の二重積分を求めなさい. ただし,  $a > 0$  とする.

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, xy \geq 0\}$$

(筑波大類 26) (固有番号 s261318)

6.10 積分  $I_R = \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - R)^2}}$  ( $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \ (a > 0)\}, R > 0$ ) について, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $I_R = \frac{2\pi}{R} \int_0^a r(r + R - |r - R|) dr$  を示せ.
- (2)  $I_R$  を求めよ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261321)

6.11  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, x \geq 0\}$  とする. 極座標を用いて, 積分

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

を計算せよ.

(埼玉大類 26) (固有番号 s261408)

6.12 領域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4x, y \geq 0\}$  における二重積分

$$\iint_D y^2 dx dy$$

の値を求めなさい.

(山梨大類 25) (固有番号 s251803)

6.13 重積分  $I = \iint_D \sin(x^2) dx dy$  を求めよ. ただし,  $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq \sqrt{\pi}\}$  とする.  
 (信州大類 26) (固有番号 s261902)

6.14 2重積分  $I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + 2xy + y^2}$  の値を求めよ.  
 ただし,  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$  とする.  
 (信州大類 27) (固有番号 s271903)

6.15  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$  とおく. 次の問いに答えよ.

- (1)  $D$  を図示せよ.
- (2) 極座標による変数変換を用いて, 2重積分

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

を計算せよ.

(金沢大類 26) (固有番号 s262203)

6.16  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq x + y \leq 1, y - x \leq 1\}$  とするとき, 広義積分

$$\iint_D (x^2 - y^2)^2 e^{y-x} dx dy$$

の値を求めよ.

(金沢大類 26) (固有番号 s262206)

6.17  $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3) dy dx$  の積分順序を変更して, その値を求めよ. また, 積分領域も図示せよ.  
 (福井大類 26) (固有番号 s262408)

6.18 以下の式でガンマ関数  $\Gamma(t)$  を定義する.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0.$$

次の問いに答えよ. ただし,  $t > 0$  のとき  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^t = 0$  となることは証明しなくても使ってよい.

- (1)  $t > 0$  に対して  $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$  となることを示せ.
- (2) 自然数  $n$  に対して  $\Gamma(n+1) = n!$  となることを示せ.
- (3)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$ , すなわち

$$\left( \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \right) \left( \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy \right)$$

を  $x, y$  の 2 変数関数の重積分で表せ.

- (4) 変数  $(x, y)$  から  $(r, \theta)$  への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r \cos \theta, \\ \sqrt{y} = r \sin \theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$  を求めよ.

- (5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$  を求めよ.

6.19 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xy e^{x+y} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

(名古屋工業大類 26) (固有番号 s262902)

6.20 重積分  $I = \iint_D x dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq x - 1\}$  を求めよ.

(名古屋工業大類 27) (固有番号 s272904)

6.21 二重積分  $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 15y \sqrt{2 + x^5} dx dy$  について以下の問に答えよ.

- (1) この二重積分に対応する積分領域を図示せよ.
- (2)  $I$  の値を求めよ.

(神戸大類 26) (固有番号 s263804)

6.22  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x\}$  とするとき, 積分

$$\int_D x^2 dx dy$$

の値を求めよ.

(神戸大類 26) (固有番号 s263807)

6.23 領域  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4, x + y > 0\}$  上での積分

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$$

を計算せよ.

(神戸大類 27) (固有番号 s273804)

6.24 実数  $\ell$  に対して  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f(x, y)$  を次で定める.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^\ell}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

- (1)  $f$  が原点  $(0, 0)$  において連続であるための  $\ell$  の条件を求めよ.
- (2)  $f$  が原点  $(0, 0)$  で  $x$  について偏微分可能であるための  $\ell$  の条件を求めよ.
- (3)  $\ell = 1$  のとき, 極限

$$J = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy$$

を考える. 変数変換  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  により,  $J$  は

$$J = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \frac{\sin(r^4 \varphi(\theta))}{r} dr \right) d\theta$$

となることを示せ. ここで,  $\varphi(\theta) = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta$  である.

(4)  $\ell = 1$  のとき (3) の極限  $J$  が存在することを示し, その値を求めよ.

その際, 広義積分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  は収束し, その値が  $\frac{\pi}{2}$  であることを用いても良い.

(広島大類 26) (固有番号 s264110)

6.25  $0 < a < \frac{1}{2}$  とし,  $xy$  平面上の領域を  $D = \left\{ (x, y) ; y \leq x - \frac{1}{2}, a \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$  とする. 次の問いに答えよ.

(1)  $D$  を図示せよ.

(2)  $I_a = \iint_D \cos(\pi(x-a)^2) dx dy$  を求めよ.

(3) (2) の  $I_a$  について,  $\lim_{a \rightarrow \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} - a \right)^{-2} I_a$  を求めよ.

(徳島大類 26) (固有番号 s264403)

6.26 次の累次積分を求めよ.

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy \right) dx$$

(愛媛大類 26) (固有番号 s264604)

6.27  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$  のとき, 重積分  $\iint_D \frac{y(e^x - 1)}{x} dx dy$  を求めよ.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264915)

6.28 次の重積分の値を求めるために, 以下の小問 (1) と (2) について答えなさい.

$$\iint_{4 \leq x^2 + y^2 \leq 9} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \quad \text{①}$$

(1) 変数  $x, y$  を  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  のように変数  $r, \theta$  を用いて変数変換をする, この変数変換のヤコビアン  $J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$  を求めなさい.

(2) 変数  $r, \theta$  とヤコビアン  $J$  を用いて, 式 ① の重積分の値を求めなさい.

(熊本大類 26) (固有番号 s265203)

6.29 重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 領域  $D$  を  $xy$  平面上に図示せよ.

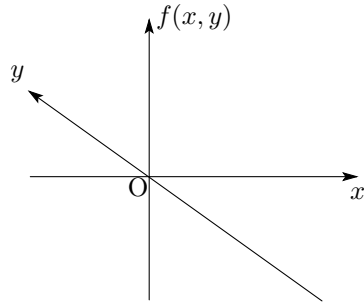
(2) 重積分  $I$  の値を求めよ.

(宮崎大類 26) (固有番号 s265302)

6.30 以下の重積分  $I$  について, 次の問いに答えなさい.

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}, \quad f(x, y) = x$$

- (1) この重積分  $I$  に相当する集合を以下の座標空間上に図示しなさい。



- (2) この重積分  $I$  の値を積分計算により求めなさい。

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265417)

6.31 次の問いに答えよ。

- (1)  $0 < r_1 < r_2$  とし,  $D_1 = \{(x, y) : r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}$  と定める. このとき,

積分  $\iint_{D_1} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy$  の値を求めよ.

- (2)  $0 < r$  とし,  $D_2 = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < r^2\}$  と定める. このとき,

広義積分  $\iint_{D_2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy$  が収束する  $\alpha$  の範囲を求めよ.

(島根大類 26) (固有番号 s265805)

6.32 不等式  $x^2 + y^2 \leq 2x$  で与えられる  $xy$  平面の領域を  $D$  とする.

- (1)  $D$  を図示せよ.

(2)  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  を求めよ.

(滋賀県立大類 26) (固有番号 s266004)

6.33 次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D (x + 2y)e^y dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$$

(和歌山大類 26) (固有番号 s266506)

## 7 微分方程式

7.1 以下の微分方程式の一般解を求めよ. なお, 途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1)  $(2x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} = 2xy$

(2)  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(北海道大類 26) (固有番号 s260101)

7.2 次の連立微分方程式について, 以下の問いに答えなさい.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + \sin t \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

- (1)  $x(t)$  を消去し,  $y(t)$  に関する微分方程式を求めなさい.

(2)  $y = A \sin t + B \cos t$  が (1) で求めた微分方程式の解になるような、適当な定数  $A, B$  を求めなさい.

(3) (2) の結果を利用して、(1) で求めた微分方程式の一般解を求めなさい.

(岩手大類 26) (固有番号 s260304)

7.3 ある定係数 2 階線形常微分方程式が、次のように与えられている.

$$f^{(2)}(x) - 2\alpha f^{(1)}(x) + \alpha^2 f(x) = 0 \quad (*)$$

$f^{(n)}(x)$  は関数  $f(x)$  の第  $n$  次導関数であり ( $n$  は自然数),  $\alpha$  は 0 でない実数定数とする.

以下の問いに答えよ.

(1)  $x$  を変数,  $k$  を実数定数とする関数  $e^{kx}$  をマクローリン展開し,  $x$  の 3 次の項まで書け. ここで,  $e$  は自然対数の底である.

(2) 関数  $f(x)$  は連続で無限回微分可能であり, 式 (\*) を  $n$  回微分したとき, 次の方程式が成り立っているとする.

$$f^{(n+2)}(x) - 2\alpha f^{(n+1)}(x) + \alpha^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$f^{(n)}(x)$  を,  $f^{(1)}(x)$  と  $f(x)$  を用いて表せ.

(3) 関数  $f(x)$  のマクローリン展開式  $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0) \frac{x^m}{m!}$  に対し, (2) で得られた  $f^{(n)}(x)$  を適用して計算することにより,  $f(x) = f(0)e^{\alpha x} + [f^{(1)}(0) - \alpha f(0)]xe^{\alpha x}$  と表されることを示せ. ここで,  $m$  は 0 以上の整数であり,  $f^{(0)}(x)$  は  $f(x)$  と見なし,  $0! = 1$  とする.

(4) 次の微分方程式を, 条件  $f(0) = 1, f^{(1)}(0) = p - 2$  ( $p$  は実数定数) のもとで解け.

$$f^{(2)}(x) + 4f^{(1)}(x) + 4f(x) = e^{-2x}$$

(5) (4) で求めた  $f(x)$  について,  $f(x) = 0$  が有限の実数解をひとつしか持たないときの  $p$  の値を求め, それぞれの  $p$  に対する  $f(x)$  の極大値を求めよ.

(東京大類 26) (固有番号 s260701)

7.4 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式  $y' + y = 0$  の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式  $y' + y = e^{-x}$  の一般解を求めよ.

(東京工業大類 26) (固有番号 s260804)

7.5 微分方程式

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1+x^2}$$

の解  $y = y(x)$  のうちで条件  $y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{2}$  を満たすものを求めなさい.

(東京農工大類 26) (固有番号 s260903)

7.6 微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = \cos \sqrt{3}x$  の解  $y = y(x)$  が,  $y(0) = 1, \frac{dy}{dx}(0) = 1$  を満たすとき,  $y$  を求めなさい.

(東京農工大類 27) (固有番号 s270904)

7.7 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1)  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 3e^{-2x}$

$$(2) (x+1)\frac{dy}{dx} = (2x+3)y$$

(横浜国立大類 26) (固有番号 s261102)

7.8 次の微分方程式の解を求めなさい.

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad t \geq 0$$

(2) 上で得られた  $x(t)$  を用いて  $y(t) = \frac{dx}{dt}$  として,  $O-xy$  直交座標系上で点  $P(x(t), y(t))$  を定義する.  $t \geq 0$  に対して点  $P(x, y)$  の描く曲線をグラフで示しなさい. (ヒント: 点  $P$  の座標の減衰項を除いた場合の曲線を先に求める.)

(千葉大類 26) (固有番号 s261204)

7.9 次の微分方程式の一般解を求め, 与えられた初期条件を満たす解曲線の概形を図示しなさい.

$$(1) (x^2 - xy)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \quad \text{初期条件: } x = e, y = e, \text{ ここで, } e \text{ は自然数の底である.}$$

(ヒント:  $\frac{y}{x} = u$  とおいて未知関数  $y(x)$  を  $u(x)$  に変換する)

$$(2) \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 17y = 0, \quad x \geq 0 \quad \text{初期条件: } x = 0, y = 1, y' = -1$$

(千葉大類 27) (固有番号 s271204)

7.10 微分方程式  $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0$  の一般解を求めよ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261320)

7.11 以下の微分方程式を解け.

$$(1) x\frac{dy}{dx} = y - 1 \quad (2) x + y\frac{dy}{dx} = 2y \quad (3) \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = e^{3x} \quad (4) \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = \sin x$$

(埼玉大類 26) (固有番号 s261404)

7.12  $y = y(x)$  に関する微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} + \frac{y}{x} \dots\dots (*)$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) 新しい未知関数  $u = u(x)$  を  $u = \frac{y}{x}$  によって定義する. このとき, 微分方程式 (\*) を  $u = u(x)$  に関する微分方程式に書き換えよ.

(2) 初期条件  $x = 2, y = 4$  のもとで, 微分方程式 (\*) の解を求めよ.

(茨城大類 26) (固有番号 s261703)

7.13 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{2x + y}$$

(山梨大類 25) (固有番号 s251804)

7.14 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{2}$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262008)

7.15 以下の問いに答えなさい.



- (1) 微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{-2x}$  を解きなさい。  
 (2) 2変数関数  $z(x, y) = f(x)e^{-2y}$  が偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2(x+y)}$$

の解になるような、2回微分可能な関数  $f(x)$  を求めなさい。

(長岡技科大類 25) (固有番号 s252104)

7.16 微分方程式

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

を考える。下の問いに答えなさい。

- (1)  $z = \frac{y}{x}$  において、 $\frac{dy}{dx}$  を  $z$ ,  $\frac{dz}{dx}$ ,  $x$  で表しなさい。  
 (2) 微分方程式 (\*) を  $z$  と  $x$  に関する微分方程式として表しなさい。  
 (3) 前問 (2) の微分方程式を解くことによって、微分方程式 (\*) を解きなさい。

(長岡技科大類 26) (固有番号 s262103)

7.17 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし、(3) についてはすべての一般解を求め、(4) については特殊解を求めよ。

(1)  $e^{2x-y} + e^{x+y} \frac{dy}{dx} = 0$

(2)  $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$

(3)  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (2x + 3y)\frac{dy}{dx} + 6xy = 0$

(4)  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 15y = 0 \quad \left(x = 0 \text{ のとき } y = 5, \frac{dy}{dx} = 1\right)$

(富山大類 26) (固有番号 s262306)

7.18 次の微分方程式の一般解を導出して、初期条件を満たす解を求めよ。

(1)  $\frac{dy}{dx} + y = x$  (初期条件:  $x = 0$  のとき,  $y = 1$ )

(2)  $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$  (初期条件:  $x = 0$  のとき,  $y = 0$ )

(福井大類 26) (固有番号 s262411)

7.19 以下の問いに答えよ。

(1)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$  の一般解を求めよ。

(2)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$  の特殊解を求めよ。

(3)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$  の一般解を求めよ。

(福井大類 26) (固有番号 s262412)

7.20 以下の微分方程式を解け。

(1)  $e^y dx + (xe^y - 3y^2)dy = 0$

(2)  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

(福井大類 26) (固有番号 s262413)

7.21 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

(1)  $\frac{dy}{dx} = ay$  (2)  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = \cos 2t$

(福井大類 26) (固有番号 s262425)

7.22 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 微分方程式  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$  を  $x = e^t$  と変数変換することで, 一般解  $y(x)$  を求めよ. ただし,  $x > 0$  とする.
(2) 微分方程式  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 6x^4$  の特殊解を  $y = Ax^4$  と表すとき,  $A$  の値を求めよ.
(3) (2) の微分方程式の解  $y(x)$  を求めよ. ただし,  $x = 1$  のとき,  $y = 4$  かつ  $\frac{dy}{dx} = 9$  とする.

(岐阜大類 25) (固有番号 s252602)

7.23 次の微分方程式の解を求めなさい.

$\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$

(三重大類 26) (固有番号 s263105)

7.24 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(x^2 + 2x)$

- (2) 解の形として  $x = ae^{i\omega t}$  を仮定し, 以下に示す手順で微分方程式

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda \frac{dx}{dt}$

を解く. ここで,  $a$  は正の実定数で  $\omega$  は複素定数とする.

- (a)  $\frac{dx}{dt}$  を計算し, それを  $x$  を用いて表せ.
(b)  $\frac{d^2x}{dt^2}$  を計算し, それを  $x$  を用いて表せ.
(c)  $\omega$  が満たすべき方程式を導け.
(d) 上で求めた方程式を解くことによって,  $\omega$  を求めよ.

(奈良女子大類 26) (固有番号 s263203)

7.25 次の微分方程式について, ( ) 内の初期条件を満たす解を求めよ.

- (1)  $2y \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x$  ( $x = 1$  のとき  $y = 0$ )
(2)  $\frac{dy}{dx} = ay + \frac{b}{y}$  ( $x = 0$  のとき  $y = 1$ ) ただし,  $a, b$  は定数で  $a \neq 0$ 
(3)  $\frac{dy}{dx} = (1 - y^2) \tan x$  ( $x = 0$  のとき  $y = 2$ )

(京都大類 26) (固有番号 s263301)

7.26  $t > 0$  で, 次の微分方程式を満たし, ( ) 内の初期条件を満たす関数  $x = x(t)$  を求めよ.

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + |x|}$  ( $t = 0$  のとき  $x = -1$ )

(京都大類 26) (固有番号 s263302)

7.27 関数  $y = y(x)$  は  $\begin{cases} yy'' + (y')^2 + yy' = x \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$  を満たしている. 関数  $z = z(x)$  を  $z = yy'$  で定める.

- (1)  $(e^x z)'$  を  $x$  の式で表せ.
- (2)  $z$  を  $x$  の式で表せ.
- (3)  $y$  を  $x$  の式で表せ.

(京都工芸繊維大類 26) (固有番号 s263404)

7.28  $m$  を自然数,  $k$  を 2 以上の自然数とする.  $x_0$  を正の実数とし, 関数  $x(t)$  に対する常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - t^m x(t)^k = 0 & (t > 0), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

を考える. 以下の問に答えよ.

- (1)  $y(t) = x(t)^{1-k}$  とおくと,  $y(t)$  が満たす常微分方程式を導け.
- (2) 広義積分

$$\int_0^\infty t^m e^{-(k-1)t} dt$$

を求めよ.

- (3) 初期値問題 (\*) の解  $x(t)$  に対して,  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} |x(t)| = \infty$  となる正の実数  $t_0$  が存在するとき解  $x(t)$  は爆発するということにする. 解  $x(t)$  が爆発するような正の実数  $x_0$  の範囲を求めよ.

(大阪大類 26) (固有番号 s263504)

7.29 微分方程式  $y'' - 2y' = xe^{2x}$  について以下の問いに答えよ. ただし,  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$  とする.

- (1) この方程式は  $y = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$  ( $A, B$  は定数) の形の特殊解を持つことを示し,  $A, B$  を決めよ.
- (2) この方程式の一般解を求めよ.

(神戸大類 26) (固有番号 s263809)

7.30 未知関数  $y = y(x)$  に関する以下の各微分方程式に対し, その一般解を求めよ.

ただし,  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$  とする.

$$(1) 2y'' - 5y' + 2y = 0, \quad (2) 2y'' - 5y' + 2y = e^x,$$

(神戸大類 27) (固有番号 s273806)

7.31 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

(広島大類 26) (固有番号 s264105)

7.32 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$2x \frac{dy}{dx} = y$$

(山口大類 26) (固有番号 s264301)

7.33 次の微分方程式の初期値問題の解  $y_0 = y_0(x)$ ,  $y_1 = y_1(x)$  を求めよ.

$$\begin{cases} y_0' = y_1 + x, \\ y_1' = -2y_0 - 3y_1, \end{cases} \quad y_0(1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{4}, \quad y_1(1) = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2},$$

(徳島大類 26) (固有番号 s264404)

7.34 (1) 次の定数係数線形常微分方程式について、以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + ay = F(x)$$

ただし、 $x$ ,  $y(x)$ ,  $F(x)$  は実数である.

(a)  $F(x) = 0$ ,  $a = 0$  のときの一般解を求めよ.

(b)  $F(x) = 0$ ,  $a = 1$  のときの一般解を求めよ.

(c)  $F(x) = 0$ ,  $a = 2$  のときの一般解を求めよ.

(d)  $F(x) = e^{2x}$ ,  $a = 1$  とする. 初期条件  $y(0) = 1$ ,  $\frac{dy}{dx}(0) = 0$  を満足する解を求めよ.

(2) 常微分方程式

$$y\frac{dy}{dx} = -4(x-1), \quad y(1) = 2$$

の解が描く曲線を  $xy$  平面上に図示せよ.

(九州大類 26) (固有番号 s264702)

7.35  $f(t) = Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta)$  が解となるような、 $t$  を独立変数とする  $f$  の 2 階微分方程式を一つ書け. ここで  $A, \lambda, \omega, \theta$  は定数とする.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264902)

7.36 いま  $N$  人からなるコミュニティの中で、流行が伝播する状況を考える. 時刻  $t$  において、流行に染まった人数を  $x(t)$  人とする. このときまだ流行に染まっていない一人の人に対する影響力を、係数  $a$  を用いて  $ax(t)$  と表現する. さらにコミュニティ全体で考えたとき、影響力の大きさは、流行に染まっていない人数  $N - x(t)$  に比例する. これを微分方程式で表現すると次のとおりである. 以下の微分方程式を満たす関数  $x(t)$  を求めよ.

$$\frac{dx}{dt} = ax(N - x)$$

ただし  $t = 0$  のとき、 $x = 1$  である.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264912)

7.37 次の微分方程式の一般解を求めよ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 2e^{2x}$$

(宮崎大類 26) (固有番号 s265301)

7.38 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1)  $y'' + 4y' + 4y = 4x$

(2)  $2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$

(3)  $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265408)

7.39 次の微分方程式を解きなさい. ただし、初期条件 ( $x = 0$  のとき、 $y = 1$ ) が成り立つものとする.

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265418)

7.40 初期値  $y(0) = 3, y'(0) = -4$  を満足する次の常微分方程式の解を求めよ.

$$y'' + y' - 6y = 0$$

ただし,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y' = \frac{dy}{dx}$  の意味である.

(室蘭工業大類 26) (固有番号 s265502)

7.41 次の微分方程式が完全形であることを示し, 一般解を求めなさい.

$$(x - y + 1)dx + (y - x + 1)dy = 0$$

(首都大類 26) (固有番号 s265905)

7.42 (1) 未知関数  $y = y(x)$  に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' - 8y' + 16y = 2 \cos x$$

の特殊解を求めよ.

(特殊解を  $y(x) = A \sin x + B \cos x$  と仮定してよい.)

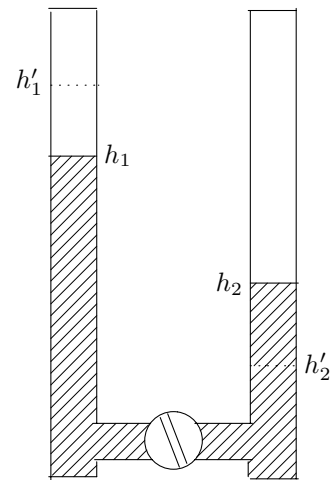
(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

(滋賀県立大類 26) (固有番号 s266002)

7.43 一般解が  $x^2 - y^2 = Cx$  となる微分方程式を示せ. なお,  $C$  は任意の定数である.

(宇都宮大類 26) (固有番号 s266106)

7.44 右図のように同じ内径のパイプの底部をコック付パイプで連結して垂直に立てた. コックを開ける前の水位は左のパイプが  $h'_1$  [cm] で右のパイプは  $h'_2$  [cm] であった. コックを開けて  $t$  [秒] 後には水位が  $h_1$  [cm] と  $h_2$  [cm] になった. ただし, 水位はパイプの底部からの高さである. 次の各問に答えなさい.



(1) 左のパイプの水位の低下速度  $dh_1/dt$  [cm/秒] は, 両パイプ間の水位差に比例していた.  $dh_1/dt$  を表す次式を完成しなさい.

ただし,  ア  には整数または分数が入り,

イ  ,  ウ  および  エ  には  $h'_1, h'_2$  または  $h_1$  の

いずれかが入る. また,  $k_1$  は係数である.

$$\frac{dh_1}{dt} = -k_1 \left\{ \text{ア} \times \text{イ} - (\text{ウ} + \text{エ}) \right\}$$

(2)  $t$  [秒] 後における水位  $h_1$  を表す次式を完成しなさい. ただし,  a  には整数または分数が入り,  b  ,  c  および  d  には  $h'_1, h'_2, k_1, t$  からなる式が入る. また,  $h_1$  を導く過程も書きなさい.

$$h_1 = -\text{a} \left\{ \text{b} \times e^{(\text{c})} + \text{d} \right\}$$

(東京海洋大類 26) (固有番号 s266404)

7.45 次の微分方程式について, 与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい..

- (1)  $\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 2$   
 (2)  $\frac{dy}{dx} + y = x, \quad y(0) = 0$   
 (3)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = y'(0) = -1$

(和歌山大類 26) (固有番号 s266507)

## 線形代数

### 8 ベクトル

- 8.1  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  とする. ベクトル  $x$  を  $a, b, c$  の 1 次結合で表せ.

(北見工業大類 26) (固有番号 s260205)

- 8.2  $xyz$  空間内に 2 点  $A(1, 0, 0), B(2, 1, 2)$  があるとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 点  $A$  を通り, ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  に平行な直線  $\ell$  の方程式を求めなさい.  
 (2) 点  $B$  を通り, 直線  $\ell$  に垂直な平面が  $y$  軸と交わる点の座標を求めなさい.  
 (3) 点  $B$  を中心とし, 原点  $O$  を通る球  $S$  の方程式を求めなさい.  
 (4) 球  $S$  と直線  $\ell$  が交わる 2 つの点の座標を求めなさい.

(岩手大類 26) (固有番号 s260301)

- 8.3  $a = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  とする. また  $c$  を 3 次元ベクトルとする. このとき以下の設問 (1), (2) に答えなさい. なお, 解答はいずれも設問 (2) の下の空白部分に記入しなさい.

- (1)  $a, b, c$  が正規直交基底をなすように  $c$  を定めなさい.  
 (2) ベクトル  $c$  は  $c = a + b$  を満たすとす. このとき, ベクトル  $c$  とベクトル  $a$  のなす角を求めなさい.

(秋田大類 26) (固有番号 s260403)

- 8.4 三次元ユークリッド空間の中でデカルト直交座標系  $O-XYZ$  が定義され, 次の 3 つのベクトル  $a, b, c$  が与えられている. このとき, 以下の問いに答えなさい.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (1) ベクトル  $a, b$  に直交するベクトルを求めなさい.  
 (2) ベクトル  $a, b$  を列ベクトルとする行列を  $A = (a \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  として, 行列  $A^T A$  を求めなさい. ここで,  $A^T$  は  $A$  の転置行列である.  
 (3) 行列  $A^T A$  の逆行列  $(A^T A)^{-1}$  を求めなさい.

- (4) ベクトル  $c$  に行列  $(A^T A)^{-1} A^T$  を乗じたベクトル  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T c$  を求めなさい。
- (5)  $Ax_0$  を求め、このベクトルを位置ベクトル  $\vec{OP}$ 、及び、ベクトル  $c$  を位置ベクトル  $\vec{OC}$  と見なしたとき、点  $P$  がベクトル  $a, b$  の定める平面上にあり、かつ  $\vec{PC}$  と  $\vec{OP}$  が直交することを示し、行列  $A(A^T A)^{-1} A^T$  の持つ幾何学的な意味を述べなさい。

(千葉大類 27) (固有番号 s271202)

8.5 三次元空間の中にデカルト直交座標系  $O - XYZ$  座標系が定義されている。

$y = 0$  平面 ( $z - x$  平面) 上の点  $A = (x_0, 0, z_0)$  を始点とし、一定方向で  $y = 0$  平面から遠ざかる点  $B$  がある。線分  $AB$  の長さは  $\lambda$  で、線分  $AB$  の方向ベクトルは、球座標系にならって、水平角 (緯度)  $\theta$ 、方位角 (経度)  $\varphi$  とする。ただし、 $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ 、 $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ 。点  $B$  の座標は、 $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$  から、

$$B = (\lambda \cos \theta \cos \varphi + x_0, \lambda \cos \theta \sin \varphi, \lambda \sin \theta + z_0)$$

で与えられる。定点  $E$  を  $E = (0, -a, h)$ 、 $a > 0$  とし、点  $E$  と点  $B$  を結ぶ直線が  $y = 0$  平面 ( $z - x$  平面) と交わる点を  $P$  とする。 $\lambda \rightarrow \infty$  の時の  $P$  の座標を求めなさい。

(ヒント :  $\lambda \rightarrow \infty$  の時の点  $P$  を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる)

(千葉大類 27) (固有番号 s271205)

8.6 空間内の直線  $x - 6 = \frac{y - 5}{2} = \frac{z - 4}{3}$  を含み、点  $(7, 8, 10)$  を通る平面の方程式を求めよ。

(名古屋工業大類 27) (固有番号 s272905)

8.7  $xyz$  空間に 3 点  $O(0, 0, 0)$ 、 $A(1, 1, 2)$ 、 $B(3, 4, 3)$  がある。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1)  $\angle AOB = \theta$  としたとき、 $\cos \theta$  を求めなさい。
- (2)  $\triangle OAB$  の面積を求めなさい。
- (3) 平面  $OAB$  の方程式を求めなさい。

(三重大類 26) (固有番号 s263103)

8.8 空間ベクトルである  $\vec{a} = (1, -1, 2)$  と  $\vec{b} = (-1, -2, 1)$  について、(1) ~ (3) に答えなさい。

- (1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角度を求めよ。
- (2)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の両方に垂直で、大きさが  $\sqrt{3}$  となるベクトル  $\vec{c}$  を求めよ。
- (3)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の両方に  $60^\circ$  の角度をなし、大きさが  $\sqrt{6}$  となるベクトル  $\vec{d}$  を求めよ。

(三重大類 26) (固有番号 s263109)

8.9 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$  と、ベクトル

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して、次の問いに答えよ。ただし、 $a$  は実数である。

- (1)  $Av_1, Av_2$  を求めよ。
- (2) 2 つのベクトル  $Av_1, Av_2$  は  $a$  の値にかかわらず一次独立となることを示せ。

(3) 3つのベクトル  $Av_1, Av_2, Av_3$  が一次従属となるような  $a$  の値をすべて求めよ.

(奈良女子大類 26) (固有番号 s263205)

8.10 正の実数  $b, c$  が  $bc = 1$  を満たすとして、空間の4点  $O(0, 0, 0), A(0, 1, 1), B(b, 0, b), C(c, c, 0)$  を考える. 三角形  $ABC$  を含む平面  $\alpha$  上に点  $H$  を、線分  $OH$  が  $\alpha$  と垂直になるようにとるとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 点  $H$  の座標を  $b$  で表せ.
- (2) 線分  $OH$  の長さの最大値を求めよ. また、そのときの  $b$  の値を求めよ.
- (3) 点  $H$  が三角形  $ABC$  の内部に存在するための  $b$  の条件を求めよ.

(岡山大類 26) (固有番号 s264004)

8.11 次の3つのベクトルに垂直な単位ベクトルを求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(山口大類 26) (固有番号 s264302)

8.12 次のベクトルの組は1次独立であるかを調べよ.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -13 \end{pmatrix}$$

(佐賀大類 26) (固有番号 s264907)

8.13 3次元空間内に原点  $O$  を一つの頂点とする三角形  $OAB$  がある. 点  $A$  と点  $B$  の直交座標をそれぞれ  $(x_1, y_1, z_1)$  および  $(x_2, y_2, z_2)$  とし、線分  $OA$  と線分  $OB$  のなす角を  $\theta$  として、以下の問いに答えなさい.

- (1) 線分  $OA$  および  $OB$  の長さを  $\overline{OA}$  および  $\overline{OB}$  のように書くことにする. このとき、線分  $AB$  の長さの2乗  $\overline{AB}^2$  を  $\overline{OA}, \overline{OB}, \theta$  を用いて表しなさい.
- (2)  $\cos^2 \theta \leq 1$  であることを利用して、次の不等式

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \geq (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \quad \text{①}$$

が成り立つことを示しなさい.

- (3) 不等式 ① で等号が成立する条件を示し、そのとき三点  $O, A$  および  $B$  はどのような位置関係にあるか述べなさい.

(熊本大類 26) (固有番号 s265202)

8.14 直交座標系  $O-xyz$  において、点  $A(1, 2, 1)$ 、点  $B(-1, 1, 2)$  がある. 以下の問いに答えよ.

- (1) 線分  $OA$  と  $OB$  のなす角  $\theta$  を求めよ.
- (2) 三角形  $OAB$  の面積  $S$  を求めよ.
- (3) 点  $A, B$  を通る直線  $\ell$  の方程式を求めよ.

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265409)

8.15  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間の4つのベクトル  $v_1, v_2, v_3, v_4$  に対して、 $v_1, v_2, v_3$  が1次独立であり、かつ  $v_1, v_2, v_3, v_4$  が1次従属であるとする. このとき、次の問いに答えよ.



- (1)  $v_4$  が  $v_1, v_2, v_3$  の 1 次結合で表されることを示せ.
- (2)  $v_4$  が零ベクトルでないとき,  $v_1, v_2, v_3$  の中に 2 つのベクトル  $a, b$  が存在して,  
 $\langle a, b, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  となることを示せ. ただし,  $x, y, z$  で張られる部分空間を  
 $\langle x, y, z \rangle$  で表わす.

(島根大類 26) (固有番号 s265802)

8.16 3 つのベクトル  $a = (\sqrt{3}, 1, 0)$ ,  $b = (0, 2, 0)$ ,  $c = (1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$  が, いずれも原点  $(0, 0, 0)$  を始点として存在しているとき, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $a$  と  $b$  の内積を求めよ.
- (2)  $a$  と  $b$  の成す角の大きさを求めよ.
- (3)  $a, b$  を共に含む平面を  $\alpha$  と呼ぶとき, 平面  $\alpha$  と  $c$  の成す角の大きさを求めよ.

(宇都宮大類 26) (固有番号 s266102)

## 9 行列

9.1 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & b & a \\ 0 & b & (a+1)^2 & ab \\ 0 & a & ab & (b+1)^2 \end{pmatrix}$  を考えるとき,  $A$  が逆行列をもつために必要かつ十分

な  $a, b$  についての条件を求めなさい.

(山梨大類 25) (固有番号 s251802)

9.2 次の正方行列  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262003)

9.3 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 & -1 \\ x & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  ( $x \in R$ ) の階数を求めよ.

(富山大類 26) (固有番号 s262307)

9.4 2 つの 2 次正方行列がある.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

これらが

$$XA^T = \frac{1}{2}A^2Y = C$$

を満たすとき, 2 次正方行列である行列  $X$  と行列  $Y$  を求めよ. ただし,  $A^T$  は行列の転置行列である. 最終の答えだけでなく途中経過も記述せよ.

(福井大類 26) (固有番号 s262409)

9.5 実係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

について、次の問に答えよ.

(1)  $A^2, A^3, A^4$  を求めよ.

(2)

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$$

を  $B_n = x_n E + y_n A$  とするとき,

$$B = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) E + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) A$$

を求めよ. ここで  $E$  は単位行列を表す.

(3)  $B = E$  を満たすような  $t$  を求めよ.

(神戸大類 27) (固有番号 s273803)

9.6 行列  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  について以下の問いに答えよ.

(1)  $A$  の逆行列が存在する条件を求めよ.

(2) (1) が満たされるとき,  $A$  の逆行列を求めよ.

(広島大類 26) (固有番号 s264104)

9.7 次の行列  $A, B$  について、以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & c \end{pmatrix}$$

(1)  $A$  の階数が 1 となる条件, 2 となる条件をそれぞれ求めよ.

(2)  $AB$  が正則であるための条件を求めよ.

(3)  $BA$  の逆行列が存在するならその条件を求めよ. 存在しないならその理由を述べよ.

(九州大類 26) (固有番号 s264701)

9.8 3次正方行列  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  の逆行列  $A^{-1}$  を求め,  $A^3, A^4$  を計算せよ.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264916)

9.9 次の設問に答えなさい.

(1) 列ベクトル  $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  と行ベクトル  $B = [d \ e \ f]$  を用いて、次の行列積を計算しなさい.

①  $AB$

②  $BA$

- (2) 次の行列の階数を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

- (3) 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

ただし,  $\omega$  は  $x^3 = 1$  の 1 つの虚数解とする.

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265403)

- 9.10  $[A], [B], [C]$  を  $n$  次正方行列とし,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

とする. 次の問いに答えなさい.

- (1)  $n$  を 3 とするとき,  $[A]$  と  $[B]$  の積  $[A][B]$  の 1 行 1 列の成分を計算しなさい.
- (2)  $n$  を任意の自然数とするとき,  $[A]$  と  $[B]$  の積  $[A][B]$  の  $i$  行  $j$  列の成分を  $\sum$  記号で表しなさい. ただし,  $i, j$  は,  $n$  以下の自然数とする.
- (3)  $n$  を任意の自然数とするとき,  $[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C]$  が成り立つことを証明しなさい.

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265419)

## 10 行列式

- 10.1  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{pmatrix}$  とする.

- (1)  $|A| = 0$  となる  $x$  を求めよ.
- (2)  $x = -1$  のとき,  $A^{-1}$  を求めよ.

(北見工業大類 26) (固有番号 s260204)

- 10.2 2次元ベクトル  $a_1, a_2$  と実数  $\gamma$  を用いて, ベクトル  $a$  を

$$a = \gamma(a_1 + a_2)$$

と定義し, ベクトル  $b_1, b_2$  を

$$b_1 = a - a_1, \quad b_2 = a - a_2$$

と定義する. また, 行列  $A, B$  を  $A = (a_1 \ a_2)$ ,  $B = (b_1 \ b_2)$  と定義する. このとき以下の設問

(1),(2),(3) に答えなさい. なお, 解答はいずれも設問 (3) の下の空白部分に記入しなさい.

- (1)  $B = AC$  を満たす 2 次正方行列  $C$  を求めなさい.
- (2)  $A, B$  の行列式を  $|A|, |B|$  で表す.  $|B|$  を  $|A|$  と  $\gamma$  を用いて表しなさい.

- (3)  $a_1, a_2$  が互いに 1 次独立であるとする. このとき,  $b_1, b_2$  も互いに 1 次独立であるための必要十分条件を  $\gamma$  を使って表しなさい.

(秋田大類 26) (固有番号 s260404)

- 10.3 (1)  $n$  次正則行列  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を  $A$  の行列式  $|A|$  及び  $A$  の余因子行列  $\tilde{A}$  を用いて表せ.  
 (2)  $A$  を成分が全て整数である  $n$  次正則行列とする. さらに,  $A$  の行列式は 1 であると仮定する. このとき,  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  の成分も全て整数となることを示せ.  
 (3) 次の行列  $B$  の行列式を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & 3 & 6 & 7 \\ b_2 & c_2 & 0 & 4 & 6 \\ b_3 & c_3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

(お茶の水女子大類 26) (固有番号 s260602)

- 10.4 実数をとる変数  $x_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$  を用いて, 行列  $X$  を

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する.  $X$  の行列式を  $|X|$  で表し,  $X$  の逆行列を  $X^{-1}$  で表す. また, 正の実数  $s$  の自然対数を  $\log s$  で表す. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $|X|$  の  $x_{11}$  に関する偏導関数  $\frac{\partial |X|}{\partial x_{11}}$  を,  $x_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$  のうちの必要なものを用いて表せ.  
 (2)  $X$  が  $|X| > 0$  を満たすとき,  $y_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$  を

$$y_{ij} = \frac{\partial(\log |X^{-1}|)}{\partial x_{ij}}$$

で定義する. このとき,  $y_{11}$  を,  $|X|$  と  $x_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$  のうちの必要なものを用いて表せ.

- (3) (2) で定義した  $y_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$  を用いて, 行列  $Y$  を

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する. このとき,  $X^{-1}$  を用いて  $Y$  を表せ.

(東京大類 26) (固有番号 s260705)

- 10.5  $n \times n$  行列  $A$  は各行に 1 と  $-1$  である要素がひとつずつあり, 残りの要素は全て 0 であるとする. ただし,  $n \geq 3$  とする.

- (1)  $A$  の列ベクトルを  $a_1, a_2, \dots, a_n$  と表す.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  は線形従属であることを示せ.  
 (2)  $A$  の任意の  $2 \times 2$  部分正方行列の行列式が取り得る値をすべて求めよ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261301)

10.6 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $a, b$  は実数とする。

(1) 行列式  $|A|$  を求めよ。

(2)  $A$  が逆行列をもつための  $a, b$  の条件を求めよ。また、 $A$  の逆行列を求めよ。

(信州大類 26) (固有番号 s261903)

10.7 次の行列式に関する等式を示せ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

(信州大類 27) (固有番号 s271904)

10.8 次の各行列式の値を求めよ。

(1)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \\ 8 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

(2)  $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

(3)  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 5 & -7 & 8 & 9 & -6 \end{vmatrix}$

(富山大類 26) (固有番号 s262304)

10.9 次の行列式の値を求めよ。

(1)  $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

(2)  $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$  ( $n$  次の行列式、対角成分は  $a$  でその他の成分は  $b$  である)

(豊橋技科大類 26) (固有番号 s262704)

10.10 行列式  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$  を因数分解せよ。

(名古屋工業大類 27) (固有番号 s272906)

10.11 正の整数  $n$  と実数  $c, y_1, y_2, \dots, y_n$  に対し、 $D_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n)$  を

$$D_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1 y_1 + c & y_2 y_1 & \cdots & y_n y_1 \\ y_1 y_2 & y_2 y_2 + c & \cdots & y_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 y_n & y_2 y_n & \cdots & y_n y_n + c \end{bmatrix}$$

で定義し、また  $n \geq 2$  のとき  $d_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n)$  を

$$d_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 y_1 & \cdots & y_n y_1 \\ y_2 & y_2 y_2 + c & \cdots & y_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_2 y_n & \cdots & y_n y_n + c \end{bmatrix}$$

で定義する。ただし、 $\det A$  は行列  $A$  の行列式を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1)  $n \geq 2$  のとき次の等式が成り立つことを示せ。

$$D_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = cD_{n-1}(c, y_2, \dots, y_n) + y_1 d_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

(2)  $n \geq 2$  のとき  $d_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = c^{n-1} y_1$  であることを示せ。

(3)  $n$  についての数学的帰納法により次の等式が成り立つことを示せ。(ただし  $0^0 = 1$  とする。)

$$D_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = c^n + c^{n-1} \sum_{k=1}^n y_k^2$$

(神戸大類 26) (固有番号 s263806)

10.12 次の行列式の値を計算せよ

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

(佐賀大類 26) (固有番号 s264905)

10.13  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  のとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}$  を満たす対称行列  $Q$  を求めなさい。ただし、 $\boldsymbol{x}^T$  は  $\boldsymbol{x}$  の転置である。

(2)  $A$  の行列式  $|A|$  を求めなさい。

(3)  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めなさい。

(首都大類 26) (固有番号 s265902)

## 11 連立方程式

11.1  $A$  は 3 行 3 列の行列で、その  $(i, j)$  成分が  $\sin\left(\frac{7i+5j-1}{6}\pi\right)$  となるものとする。

(1)  $A$  の行列式を計算しなさい。

(2) 連立 1 次方程式  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  の解のうちで  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  を満たすものをすべて求めなさい。

(東京農工大類 26) (固有番号 s260904)

11.2  $(n+1)$  次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & c & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & c & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

に対し、連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

が解を持つための必要十分条件は、 $c = 1$  または  $c = -n$  となることである。このことを示せ。

(筑波大類 26) (固有番号 s261312)

11.3  $a, b$  を実数とし、次の連立 1 次方程式を考える。

$$(*) \begin{cases} x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + y + az = 9 \\ -3x - 5y + 4z = b \end{cases}$$

- (1) 連立 1 次方程式 (\*) が解を持つ条件を  $a, b$  を用いて述べよ。
- (2) 連立 1 次方程式 (\*) が解を無限個持つような  $a, b$  に対して、その一般解を求めよ。

(埼玉大類 26) (固有番号 s261405)

11.4  $a$  を実数の定数とする。  $xy$  平面において、関数  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  のグラフが 3 点  $(2, 1)$ ,  $(3, -1)$ ,  $(a, 0)$  を通るとする。このような実数  $\alpha, \beta, \gamma$  がただ 1 組定まるための必要十分条件は、 $a \neq 2$  かつ  $a \neq 3$  であることを示せ。また、この条件のもとで、 $\alpha, \beta, \gamma$  の値を求めよ。

(茨城大類 26) (固有番号 s261704)

11.5  $a$  を定数とする。以下の連立一次方程式の解が存在する  $a$  をすべて求め、その全ての  $a$  に対して連立方程式の解  $(x, y, z)$  をすべて求めよ。

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 3x + 5y - 7z = 5 \\ -x - 3y + 5z = a \end{cases}$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262012)

11.6 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  と 3 次元ベクトル  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$  を考える。以下の問いに答えなさい。

- (1)  $A$  の行列式  $|A|$  を求めなさい。
- (2) 3 次元ベクトル  $p$  についての方程式  $Ap = b$  が解を持つように、 $k$  を定めなさい。
- (3) 前問で定めた  $k$  について、 $Ap = b$  の解のうちで  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  と垂直なものを求めなさい。

(長岡技科大類 25) (固有番号 s252102)

11.7 下の問いに答えなさい。

- (1)  $\alpha$  を定数,  $x$  を未知数とする方程式

$$\alpha x + 3x = 0$$

が  $x = 0$  以外の解を持つような  $\alpha$  の値を求めなさい。

- (2)  $\alpha$  を定数,  $x, y$  を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ 2x + (\alpha - 1)y = 0 \end{cases}$$

が  $x = y = 0$  以外の解を持つような全ての  $\alpha$  の値を求め, それぞれの  $\alpha$  に対する  $x = y = 0$  以外の解  $(x, y)$  を 1 つずつ求めなさい。

(長岡技科大類 26) (固有番号 s262102)

11.8 以下の連立一次方程式を解け, ただし, 計算過程を解答用紙に明記すること。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 5y + 3z = 13 \\ x + 8z = -5 \end{cases}$$

(豊橋技科大類 26) (固有番号 s262703)

11.9  $a$  を定数とするとき, 次の連立一次方程式の解を求めよ。

$$\begin{cases} x - y + az = 1 \\ x + ay - z = a \\ ax + y + z = a + 1 \end{cases}$$

(名古屋工業大類 26) (固有番号 s262905)

11.10 次の方程式が解を持つような  $a, b$  の値を求めよ。また, そのときの解を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - 1 \\ 2a + 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大類 26) (固有番号 s264906)

11.11 連立一次方程式 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 について, 次の各問に答えよ。

- (1) この連立一次方程式を, 行列  $A$  を用いて  $Ax = b$  と表したときの  $A$  を求めよ。ただし,  $x$  と  $b$

はベクトルであり,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  とする。

- (2)  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めよ。  
(3) 連立一次方程式を解け。

(宮崎大類 26) (固有番号 s265303)

11.12  $x, y, z$  を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + 3y + (a + 3)z = 3 \\ x + 3y + a^2z = -3 \end{cases}$$

を考える。



- (1) これが解をもたないように  $a$  を定めよ.  
 (2) これが無限個の解をもつように  $a$  を定めよ.

(滋賀県立大類 26) (固有番号 s266003)

11.13 次の連立一次方程式を行列の演算を使って解きなさい.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

(和歌山大類 26) (固有番号 s266502)

## 12 線形変換

12.1 2 次の正方行列  $A$  による 1 次変換  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を考える. ただし,  $A, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の要素はすべて実数である. このとき, 以下の設問に答えよ. なお, 途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする. このとき,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$  で表される 4 つの点の像を求めよ. また, この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が, 1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ. ただし,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$  を頂点とする平行四辺形の面積は  $|ad - bc|$  で与えられる.

(2)  $A$  を直交行列  $\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$  (ただし,  $r^2 + s^2 = 1$ ) とする. このとき,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$  で表される 4 つの点の像を求めよ. また, この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が, 1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ.

(3)  $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$  とする. このとき,  $A$  は対称行列である.  $A$  を直交行列を用いて対角化せよ.

(4) (3) と同じく,  $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$  とする. このとき,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  で表される 4 つの点の像を考える. この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が, 1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ.

(北海道大類 26) (固有番号 s260102)

- 12.2 (1) 座標系  $\{x, y\}$  から  $\{x', y'\}$  への線形変換で,  $x^2 - y^2$  を不変にするものを求めてください.  
 (2) 正方形はどのように変換されるか, 2 次元面に図示してください.

(お茶の水女子大類 26) (固有番号 s260604)

12.3 直交座標系の座標軸  $O-xyz$  を, 原点を固定して回転した座標軸を  $O-XYZ$  とする. 直交座標の基本ベクトル  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  がそれぞれ, 新座標系の正規直交形で

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ と表されたとき, 以下の設問に答えよ.}$$

- (1) 旧座標系で表された点  $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$  の新座標系での座標を求めよ.  
 (2) 新座標系で  $(0, 4, 2)$  と表される点の旧座標系での座標を求めよ.

(埼玉大類 26) (固有番号 s261401)

12.4  $x$ - $y$  平面上の曲線  $y = 2x^2$  を, 原点のまわりに  $45^\circ$  回転して得られる曲線の方程式を求めよ.

(新潟大類 26) (固有番号 s262009)

12.5 行列  $A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  による 1 次変換において  $x^2 - y^2 = 1$  を満たす不動点  $Q(x, y)$  が存在する.

$m$  の値と点  $Q(x, y)$  を求めよ.

(三重大類 26) (固有番号 s263110)

12.6 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  で表される線形変換を  $f$  とする. 次の問に答えよ.

- (1) この線形変換  $f$  によって動かない点をすべて求めよ.  
 (2) この線形変換  $f$  によって動かない直線をすべて求めよ.

(京都大類 26) (固有番号 s263303)

12.7 直交座標系 (デカルト座標系)  $\Gamma$  に対して,  $O'(1, 1, 1)$ ,  $e_{x'} = {}^t(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ ,  
 $e_{y'} = {}^t(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ,  $e_{z'} = {}^t(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$  とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) 新座標系  $\Gamma' = \{O' : e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}\}$  も直交座標系であることを示し, かつ座標変換  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$  の式を求めよ.  
 (2) 座標系  $\Gamma$  における方程式が  $x + y + z = 6$  である平面  $\pi$  の, 新座標系  $\Gamma'$  における方程式を求めよ.  
 (3) 座標系  $\Gamma$  における方程式が,  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$  である直線  $g$  の, 新座標系  $\Gamma'$  における方程式が,

$$\frac{x' - \boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{い}}} = \frac{y' - \boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}} = z' \text{ になるとき, } \boxed{\text{あ}} \sim \boxed{\text{え}} \text{ の空欄に入る数を求めよ.}$$

(京都大類 26) (固有番号 s263304)

12.8 原点の周りの  $\frac{\pi}{3}$  の回転により, 方程式  $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 2ay + b = 0$  が 2 次曲線  $y = x^2 - 1$  に移される場合, 定数  $a, b$  の値を求めなさい.

(和歌山大類 26) (固有番号 s266503)

### 13 固有値とその応用

13.1 対称行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 固有値を求めなさい.

- (2) 行列  $A$  を直交行列により対角化しなさい。  
 (3)  $X^2 - E = A$  を満たす行列  $X$  をひとつ求めなさい。

(岩手大類 26) (固有番号 s260302)

13.2 3 次対称行列  $A$  および 3 次元ベクトル  $u$  を、次のように定義する。

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $A$  の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ。  
 (2)  $f(x, y, z) = {}^t u A u$  と定める (ここで、左上付き添字  ${}^t$  は転置を表す)。  $f(x, y, z)$  を  $x, y$  および  $z$  の多項式で表せ。  
 (3) 原点を通り  $A$  の固有ベクトルに平行な直線と、2 次曲面  $f(x, y, z) = 18$  との交点をすべて求めよ。

(東北大類 26) (固有番号 s260502)

13.3 5 次正方行列  $A$  を次で与える：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1)  $A$  の固有値は、 $-2$  と  $8$  であることを示せ。  
 (2)  $A$  の固有値  $-2, 8$  の固有空間をそれぞれ  $V(-2), V(8)$  で表す。 $a$  を  $V(-2)$  の  $0$  でないベクトルとし、 $b$  を  $V(8)$  の  $0$  でないベクトルとする。このとき、 $a, b$  は 1 次独立 (線形独立) であることを示せ。  
 (3) 各固有空間  $V(-2), V(8)$  の基底を求めよ。  
 (4) 行列  $A$  が対角化可能であることを示し、 $P^{-1}AP$  が対角行列となる正則行列  $P$  を求めよ。

(お茶の水女子大類 26) (固有番号 s260603)

13.4 3 次正方行列  $M$  を次で定義する：

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -a^2 + 2a + 3 & 2 & a^2 - 6a + 7 \\ a^2 - 3a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき以下の問いに答えよ。

- (1)  $a = 1$  のとき  $P^{-1}MP$  が対角行列となるような正則行列  $P$  を一つ求めよ。  
 (2)  $a = 2$  のとき  $Q^{-1}MQ$  が対角行列となるような正則行列  $Q$  が存在するか否かを理由をつけて述べよ。またそのような  $Q$  が存在する場合は  $Q^{-1}MQ$  を求めよ。  
 (3)  $a = 3$  のとき  $R^{-1}MR$  が対角行列となるような正則行列  $R$  が存在するか否かを理由をつけて述べよ。またそのような  $R$  が存在する場合は  $R^{-1}MR$  を求めよ。

(東京工業大類 26) (固有番号 s260803)

13.5  $c$  を定数とする. 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix}$  が 1 を固有値としてもつとき, 次の問いに答えなさい.

(1)  $c$  の値を求めなさい.

(2)  $A$  の固有値 1 に属する固有ベクトルで  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$  の形のものを求めなさい.

(東京農工大類 27) (固有番号 s270903)

13.6  $0 < x < 1$  とし,  $A = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$  とおく. 次の問いに答えよ.

(1)  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2)  $P^{-1}AP$  が対角行列となる正則行列  $P$  を 1 つ求めよ.

(3)  $n$  を 1 以上の整数とする,  $A^n$  を求めよ.

(4)  $A^n$  の各成分は,  $n \rightarrow \infty$  のとき極限をもつことを示せ.

(横浜国立大類 26) (固有番号 s261101)

13.7 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  とそれぞれに対応する固有ベクトル  $p_1, p_2$  を求めなさい.

(2) 固有ベクトルを縦ベクトルとして, 横に並べた行列  $P = [p_1, p_2]$  の逆行列  $P^{-1}$  を求めなさい.

(3)  $P^{-1}AP$  を求めなさい.

(4)  $(P^{-1})^T = [q_1, q_2]$  で定義されるベクトル  $q_1, q_2$  が  $A^T$  の固有ベクトルであることを示しなさい. ここで  $A^T$  は  $A$  の転置行列を表す.

(千葉大類 26) (固有番号 s261202)

13.8 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  について以下の問いに答えよ.

(1)  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  を求めよ. ただし,  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$  とする.

(2)  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  に属する固有ベクトルをそれぞれ  $p_1, p_2, p_3$  とするとき,  $\{p_1, p_2, p_3\}$  は  $R^3$  の正規直交基底となるように選ぶことができる. そのように選んだ  $\{p_1, p_2, p_3\}$  を 1 組求めよ.

(3) (2) で求めた  $\{p_1, p_2, p_3\}$  を使って行列  $P$  を  $P = (p_1 \ p_2 \ p_3)$  とおくと, その逆行列  $P^{-1}$  は  $P$  の転置行列  ${}^tP$  で与えられる. これは  $P$  がどのような行列であることによる性質か. また,  $P^{-1}$  および  $P^{-1}AP$  はどうなるかを書け.

(4) 連立線形微分方程式  $\frac{d^2}{dt^2}r(t) = -Ar(t)$  を考える. ここで,  $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  である.

$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  とおくと,  $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$  が満たす微分方程式をそれぞれ求

めよ. さらに, その一般解を求めよ.

(5) 初期条件が  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{z}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  と与えられたとき,  $x(t), y(t), z(t)$

を求めよ. ここで,  $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ,  $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ ,  $\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$  である.

(筑波大類 26) (固有番号 s261311)

13.9 (1) 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の固有値をすべて求め, さらに, それぞれの固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 次の主張は正しいか, それとも誤りか, 正しいければ証明し, 誤りならば反例を挙げよ.

(主張) 「2次実正方行列  $B$  が相異なる実数の固有値  $\alpha, \beta$  を持つならば, ある実正則行列  $P$  が存在し,  $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となる.」

(埼玉大類 26) (固有番号 s261406)

13.10 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a+b \\ a & 1 & b \\ a+b & b & 1 \end{pmatrix}$  について, 次の問いに答えよ. ただし,  $a, b$  は実数とする.

(1)  $A$  が 1 を固有値にもつための  $a, b$  の条件を求めよ.

(2)  $A$  が 1 を固有値にもち, その重複度が 2 以上であるための  $a, b$  の条件を求めよ.

(3)  $A$  が 1 と 2 を固有値にもつとき,  $a, b$  の値を求めよ.

(信州大類 26) (固有番号 s261904)

13.11 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  について, 次の問いに答えよ. ただし,  $a$  は実数とする.

(1)  $A$  が固有値 1 と, それとは異なる実数の固有値をもつための  $a$  の条件を求めよ.

(2) 固有値 1 に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(信州大類 27) (固有番号 s271905)

13.12 行列  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$  の固有値を  $\alpha_1, \alpha_2$  とし, それぞれの固有値に対する固有ベクトルを  $\nu_1, \nu_2$  とする. また, 行列  $T = [\nu_1 \ \nu_2]$  とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1)  $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$  となることを示せ. ただし, ベクトル  $T^{-1}$  はベクトル  $T$  の逆行列である.

(2) ベクトル  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  について,  $c = Ab$ ,  $b = Tp$ ,  $c = Tq$  とするとき,  $q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} p$  なることを示せ.

(3)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  のとき,  $\alpha_1 < \alpha_2$  の値を求めよ. また,  $\nu_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\nu_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  となることを示せ.

(4)  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  のとき、ベクトル  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  の値を求め、 $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{p}$  となっていることを確かめよ。

(新潟大類 26) (固有番号 s262005)

13.13 行列  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ( $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ) とする。  $i = 1, 2, 3$  に対して、 $\lambda_i$  に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを  $\mathbf{u}_i$  とする。このとき、次の問に答えよ。

(1)  $i = 1, 2, 3$  に対して、 $\lambda_i$  および  $\mathbf{u}_i$  を求めよ。

(2)  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$  とし、 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \mathbf{v}$  とおく。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{z_n}$  を求めよ。

(金沢大類 26) (固有番号 s262201)

13.14 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  について、次の問いに答えよ。

(1)  $A$  の固有値をすべて求めよ。

(2)  $A$  の各固有値に対する固有空間を求めよ。

(3)  $P^{-1}AP$  が対角行列となるような正則行列  $P$  を一つ求めよ。

(金沢大類 26) (固有番号 s262205)

13.15 次の 3 つの列ベクトルがある。

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ある行列  $A$  は 3 次正方行列である。この行列  $A$  と前述のベクトルは、次の関係を満たすものとする。

$$A\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

$$A\mathbf{x}_2 = 2\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3$$

$$A\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3$$

ベクトル  $\mathbf{y}$  が実数  $s$  と  $t$  によって次のように  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  の一次結合で表される。

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 + t\mathbf{x}_3$$

また、行列  $B$  は  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  からなり  $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  である

以下の問に答えよ。最終の答えだけでなく途中経過も記述せよ。

(1) 行列  $B$  の行列式の値を求めよ。

(2) そのベクトル  $\mathbf{y}$  が行列  $A$  の固有ベクトルとなるとき、実数  $s$  と  $t$  を求めよ。

(3) 行列  $A$  とその固有ベクトル  $\mathbf{y}$  に対応する固有値を求めよ。

(4) 行列  $AB$  を求めよ。

13.16 以下の問いに答えよ.

- (1) 下記に示す行列の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ. ただし, 固有ベクトルは正規化すること.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

- (2) (1) で求めた固有ベクトルが一次独立であることを示せ.  
 (3) (1) で与えられた行列を対角化せよ. (導出過程を示すこと)

(福井大類 26) (固有番号 s262414)

13.17 行列  $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(福井大類 26) (固有番号 s262418)

13.18 以下の与える行列  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列  $A$  の固有値及び固有ベクトルを求めよ.  
 (2) 行列  $A$  の対角行列を  $\Sigma = U^{-1}AU$  とする. 行列  $A$  を対角化する行列  $U$  を求めよ.  
 (3) 行列  $U$  を用いて対角化した行列  $A$  の対角行列  $\Sigma$  を求めよ.

(福井大類 26) (固有番号 s262427)

13.19 (1) 行列  $A = \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$  のすべての固有値と, それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ. ただし,  $a, b, c$  は実数である.

- (2) 行列  $A$  を対角化する直交行列の中で, 対称行列となる  $P$  を一つ求めよ.  
 (3)  $A^n$  を求めよ. ただし,  $n$  は自然数を表す.

- (4) (2) で求めた  $P$  を用いて  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  を  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  と 1 次変換することで,  $x^2 + 2y^2 + z^2 + xz$  が  $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$  と表せることを示せ. また, 定数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  の値を求めよ.

(岐阜大類 25) (固有番号 s252603)

13.20 (1) 次の行列  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2)  $P^{-1}AP$  が対角行列になるような行列  $P$  を 1 つ求めよ.

(3) 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 1,$

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n \quad (n \geq 1)$$

で定義する. このとき

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

を満たす 3 次正方行列  $B$  を求めよ.

(4) 一般項  $a_n$  を求めよ.

(岐阜大類 26) (固有番号 s262602)

13.21 次の行列  $A, B$  に関して, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列  $A$  の逆行列を求めよ.

(2) 行列  $B$  の最小固有値およびそれに対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列  $B^2$  の固有値をすべて求めよ.

(4) 行列  $B^5$  の固有値をすべて求めよ.

(豊橋技科大類 27) (固有番号 s272702)

13.22 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(1)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(2)  $\begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(名古屋大類 26) (固有番号 s262802)

13.23 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ( $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ ) とするとき, 次をみたす正則行列  $P$  をひとつ求めよ.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大類 26) (固有番号 s262904)

13.24 行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  は対角化可能か否か判定せよ.

(名古屋工業大類 27) (固有番号 s272907)



13.25 平面内で  $ax^2 + 2xy + y^2 = 1$  を表す曲線が双曲線となるような実数  $a$  の範囲を求めよ.  
(名古屋工業大類 27) (固有番号 s272908)

13.26 2 次の正方行列  $A$  を用いると, 点  $(2, 1)$ ,  $(-1, 5)$  をそれぞれ点  $(4, 14)$ ,  $(-13, 37)$  に移す 1 次変換を行うことができる. このとき, 以下の問いに答えなさい.

- (1) この 1 次変換のための行列  $A$  を求めなさい.
- (2) この行列  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めなさい.
- (3) 行列  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(三重大類 26) (固有番号 s263104)

13.27 (1)  $a$  を実数とする. 行列  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  の階数を求めよ

(2) 整数を成分とする 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  がある.

- (a)  $A$  の固有多項式の 1 次の項の係数を求めよ.
- (b)  $A$  が複素数の範囲でただ一つの固有値  $\alpha$  をもつとき,  $3\alpha^2$  は整数であることを示せ.

(京都工芸繊維大類 26) (固有番号 s263401)

13.28 次の 2 次曲線 (a) について以下の設問に答えよ.

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 + c = 0 \cdots \cdots (a)$$

- (1)  $x = (x, y)^T$  として, 式 (a) を  $x^T Ax + c = 0$  の形で表すときの対称行列  $A$  を示せ. ただし,  $T$  は転置を表す.
- (2) 行列  $A$  の固有値を求めよ.
- (3)  $P^{-1}AP$  を対角行列にする正則行列  $P$  とそのときの対角行列  $B = P^{-1}AP$  を求めよ. ただし, 正則行列の列ベクトルの大きさは 1 とする.
- (4)  $x' = (x', y')^T$  として設問 (3) の正則行列  $P$  を用いて  $x = Px'$  で式 (a) を座標変換して得られる  $x'^T Bx' + c = 0$  の概形を  $x'$  軸,  $y'$  軸と共に描け. ただし,  $c = -12$  とする.

(大阪大類 26) (固有番号 s263502)

13.29 行列  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  に対し,  $R^2$  でのベクトルを考えると, 以下の問に答えよ.

- (1)  $A$  の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.
- (2)  $A$  は対角化可能かどうかを答えよ. またその理由も述べよ.
- (3)  $A$  の固有ベクトルのうち長さが 1 のものの 1 つ  $u$  を求め,  $u$  と直交する長さ 1 のベクトルのうちの 1 つ  $v$  を求めよ. これらのベクトル  $u, v$  に対し,  $[u \ v]^{-1}A[u \ v]$  を求めよ.
- (4) 任意の自然数  $n$  に対する  $A^n$  を求めよ.

(神戸大類 26) (固有番号 s263802)

13.30 (1) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -6 & -20 \\ -12 & 7 & 20 \\ 12 & -6 & -19 \end{bmatrix}$$

の固有値  $\lambda$  と固有空間  $W(\lambda; A)$  をすべて求めよ.

(2) ベクトル

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が一次独立であることを示し、これらをシュミットの方法により正規直交系になおせ。

(神戸大類 26) (固有番号 s263805)

13.31 実係数行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & -a \\ a & -a & a^2 - 1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ。

- (1)  $M$  の固有値  $\lambda$  と固有空間  $W(\lambda; M)$  を求めよ。
- (2) 固有空間  $W(\lambda; M)$  の正規直交基底を求めよ。

(神戸大類 27) (固有番号 s273801)

13.32  $2 \times 2$  行列  $A$  は、固有値 1 に属する固有ベクトル  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  と固有値 4 に属する固有ベクトル  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  を持つとする。また、 $2 \times 2$  行列  $B$  を  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  により定義する。以下の問いに答えよ。

- (1)  $2 \times 2$  行列  $P$  で  $A = PBP^{-1}$  が成り立つようなものをひとつ見つけよ。(答だけで良い。)
- (2) 行列  $A$  を求めよ。
- (3)  $2 \times 2$  行列  $X$  で  $X^2 = B$  となるようなものを全て求めよ。
- (4)  $2 \times 2$  行列  $Y$  で  $Y^2 = A$  となるようなものはいくつあるか。また、そのような  $Y$  をひとつ見つけよ。
- (5)  $2 \times 2$  行列  $Z$  で  $Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  となるようなものを全て求めよ。

(広島大類 27) (固有番号 s274101)

13.33  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  とする。次の問い

に答えよ。

- (1)  $A$  と  $B$  の積  $AB$  を求めよ。
- (2)  $ABx = \alpha x$  を満たす定数  $\alpha$  を求めよ。
- (3)  $B^{-1}A^{-1}x = \beta x$  を満たす定数  $\beta$  を求めよ。

(徳島大類 26) (固有番号 s264401)

13.34 3次正方行列  $A$  の固有値が 3, 2, 1 で、それらに対応する固有ベクトルが順に  $u, v, w$  であったとする。また、

$$P = (u \ v \ w)$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $A$  の行列式を求めよ.
- (2) 正の整数  $n$  に対して,  $A^n - A$  は逆行列を持つかどうかを理由を挙げて答えよ.
- (3)  $P$  は逆行列を持つかどうかを理由を挙げて答えよ.
- (4)  $A$  を  $P$  を用いて表わせ.
- (5) 正の整数  $n$  に対して,  $A^n$  を  $P$  を用いて表わせ.

(高知大類 26) (固有番号 s264503)

13.35  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$  とする.

- (1) 行列  $A$  の固有値をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた行列  $A$  の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大類 26) (固有番号 s264605)

13.36 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

に対し, 以下の各問いに答えよ.

- (1)  $A$  の逆行列を求めよ.
- (2)  $A$  の固有値を求めよ.

(九州大類 26) (固有番号 s264708)

13.37 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

に対し, 以下の各問いに答えよ.

- (1)  $A$  の固有値を求めよ.
- (2)  $P^{-1}AP$  が対角行列となる直交行列  $P$  を一つ求めよ.

(九州大類 26) (固有番号 s264709)

13.38 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

に対して,  $P^{-1}AP$  が対角行列になるような正則行列  $P$  を一つ求めよ. さらに, 対角行列  $P^{-1}AP$  も書け.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264908)

13.39  $n$  次の正方行列  $A$  について, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $A$  が次のように与えられたとき、すべての固有値と対応する大きさ 1 となる固有ベクトルをすべて求めよ.

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

- (2) (1) で求めた固有ベクトルを列ベクトルとして並べて作られる行列を  $P$  とするとき、行列  $P$  の転置行列  $P^T$  と逆行列  $P^{-1}$  をそれぞれ求めよ. また、求めた  $P^T$  と  $P^{-1}$  の関係を満足する  $n$  次正方行列の名称を答えよ.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264911)

- 13.40 3次正方行列  $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  の固有値と それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264918)

- 13.41 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , 行列  $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 3a \end{pmatrix}$ , ( $a \neq 0$ ), 行列  $B = P^{-1}AP$  とする.

ここで、 $P^{-1}$  は  $P$  の逆行列を表す. このとき、次の問いに答えなさい.

- (1) 行列  $P^{-1}$  を求めなさい.
- (2) 行列  $B$  を求めなさい.
- (3)  $n$  を正の整数とすると、 $A^n = PB^nP^{-1}$  が成り立つことを証明しなさい.

(大分大類 26) (固有番号 s265101)

- 13.42 次の行列  $A$  について、以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

- (1)  $A$  の行列式  $|A|$  を求めよ.
- (2)  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めよ.
- (3)  $A$  の二つの固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  を求めよ.

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265410)

- 13.43 行列  $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$  の固有値は  $\frac{4}{5}$  であり、固有単位ベクトルは  $\vec{a} = (a_x, a_y) = \frac{\sqrt{5}}{5}(1, 2)$  である.

以下の問いに答えなさい.

- (1)  $\vec{a}$  と直交する単位ベクトル  $\vec{b} = (b_x, b_y)$  を求めなさい. ただし、 $b_x < 0$  とする.
- (2) 行列  $P$  を  $\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}$  とおく.  ${}^t P P$  と  $P {}^t P$  を求めなさい. ただし、 ${}^t P$  は  $P$  の転置行列とする.
- (3)  ${}^t P A P$  を求めなさい.

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265414)

- 13.44 行列  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$  について、以下の問いに答えよ.

- (1)  $A$  の固有値を求めよ.

- (2)  $A$  の固有ベクトルを求めよ.  
 (3)  $A$  を対角化せよ.

(室蘭工業大類 26) (固有番号 s265501)

13.45 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

(香川大類 26) (固有番号 s265703)

13.46  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  のとき、以下の問いに答えなさい.

- (1)  $A$  の固有値、および各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.  
 (2)  $A$  を対角化する正則行列  $P$  を求めて、 $A$  を対角化しなさい.  
 (3)  $A^n$  の各成分を  $n$  を用いた式で表しなさい。ただし、 $n$  は自然数である.

(首都大類 26) (固有番号 s265903)

13.47 行列  $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$  および、実ベクトル  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  によって  ${}^t x B x = 1$  で表される 2 次曲線  $C$

について、以下の問いに答えよ。ここで、 ${}^t x$  は  $x$  の転置を表す.

- (1) 行列  $B$  を対角化せよ.  
 (2) 2 次曲線  $C$  を座標平面上に図示せよ.

(はこだて未来大類 26) (固有番号 s266302)

13.48 次のベクトル  $v$  と行列  $A, B, C$  について、あとの問いに答えなさい。回答は途中の式も省略せず書きなさい.

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1)  $Av, Bv, Cv$  について、定義されるときは、それぞれの値を計算しなさい。定義されないときはその理由を答えなさい.  
 (2) 行列式  $|A|, |B|$  をそれぞれ答えなさい.  
 (3) 行列  $A, B$  の逆行列をそれぞれ答えなさい.  
 (4) 行列  $B$  の固有値と固有ベクトルをそれぞれ答えなさい.

(岩手県立大類 26) (固有番号 s267001)

## 14 線形空間など

14.1 4 次正方行列  $A$  とベクトル  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$  を以下で定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに,  $v_1, v_2$  で生成される  $\mathbb{R}^4$  の部分空間を  $V$  とし, 線形写像  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  を  $f(x) = Ax$  ( $x \in \mathbb{R}^4$ ) で定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 不適切な設問により解答を導き出せないという出題ミスがあったため, 掲載を差し控えさせていただきます.

(2)  $f$  を部分空間  $V$  に制限して得られる線形写像を

$$g: V \rightarrow V, \quad g(x) = Ax \quad (x \in V)$$

とするとき,  $g$  の基底  $\{v_1, v_2\}$  に関する表現行列  $B$  を求めよ.

(3)  $B$  の固有ベクトルをすべて求め, その各固有値に対する  $B$  の固有ベクトルを求めよ.

(4)  $V$  の基底  $\{w_1, w_2\}$  に関する  $g$  の表現行列が対角行列になるような基底  $\{w_1, w_2\}$  を 1 組求めよ.

(電気通信大類 26) (固有番号 s261001)

14.2 4 次正方行列  $A$  とベクトル  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$  を以下で定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 11 & -9 & 13 & -11 \\ 18 & -16 & 10 & -8 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに,  $v_1, v_2$  で生成される  $\mathbb{R}^4$  の部分空間を  $V$  とし, 線形写像  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  を  $f(x) = Ax$  ( $x \in \mathbb{R}^4$ ) で定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1)  $f$  の像  $\text{Im } f$  の次元  $\dim \text{Im } f$  および  $f$  の核  $\text{Ker } f$  の次元  $\dim \text{Ker } f$  を求めよ.

(2)  $\text{Ker } f \subset V$  を示せ.

(3)  $V$  と  $\text{Im } f$  の共通部分  $V \cap \text{Im } f$  の次元を求め, その基底を 1 組求めよ.

(電気通信大類 26) (固有番号 s261002)

14.3  $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$  とし, 線形変換  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  は,  $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ を満たすとする.}$$

(1) この線形変換  $f$  の標準的な基底に関する行列表現を示せ.

(2) ある実数  $\lambda (\neq 0)$  が存在して,  $f(x) = \lambda x$  を満たすベクトル  $x$  のうち,  $\|x\| = 1$  を満たすベクトルをすべて求めよ.

(3) 整数  $n (> 0)$  に対し, 線形変換  $f^n$  を,  $f^1(x) = f(x)$ ,  $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$  で帰納的に定義する.  $f^n$  の標準的な基底に関する行列表現を, 直交行列と対角行列を用いて表せ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261302)

14.4 3 次元の列ベクトルからなる線形空間を  $V^3$  とし,  $f$  を  $V^3 \rightarrow V^3$  の線形写像とする.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ として以下の小問に答えよ.}$$

- (1)  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , および  $\{b_1, b_2, b_3\}$  は  $V^3$  の基底となることを示せ.
- (2)  $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, f(a_3) = b_3$  のとき,  $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$  を  $e_1, e_2, e_3$  の線形結合として表せ.
- (3)  $\{e_1, e_2, e_3\}$  に関する  $f$  の表現行列  $A$  を求めよ.
- (4) 行列  $A$  の固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (5)  $A^n$  を求めよ. ただし,  $n$  は  $n \geq 1$  の整数である.

(筑波大類 26) (固有番号 s261308)

14.5  $f : V \rightarrow V$  を実ベクトル空間  $V$  の間の線形写像,  $\alpha$  を  $f$  の実固有値,  $V_\alpha$  を  $\alpha$  に関する  $f$  の固有空間とする.  $V$  の部分空間  $W_1, W_2$  が次の 2 条件を満たすとする:

- (a)  $V = W_1 \oplus W_2$
- (b)  $f(W_1) \subseteq W_1, f(W_2) \subseteq W_2$

このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $V_\alpha = (V_\alpha \cap W_1) \oplus (V_\alpha \cap W_2)$  が成り立つことを示せ.
- (2)  $\dim V_\alpha = 1$  ならば,  $V_\alpha$  は  $W_1$  または  $W_2$  の部分空間であることを示せ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261313)

14.6  $f : X \rightarrow X$  を集合  $X$  上の写像とし, 写像  $f^n : X \rightarrow X$  を,  $n \geq 1$  のとき  $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ 個}}, f^0 = \text{id}_X$

( $=X$  上の恒等写像) で定義する. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $f \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X) \right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$  が成り立つことを示せ.
- (2)  $f$  が単射ならば,  $f \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X) \right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$  が成り立つことを示せ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261316)

14.7  $\mathbf{R}^3$  のベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, (a, b, c \in \mathbf{R})$$

とする.

- (1)  $v_1, v_2, v_3$  が生成するベクトル空間の基底を一組求めなさい.
- (2)  $v_1, v_2, v_3, v_4$  が生成するベクトル空間の次元が 3 となる  $a, b, c$  の条件を求めなさい.
- (3)  $A = (v_1 \ v_2 \ v_4)$  を用いて, 1 次写像  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^3)$$

によって定める,  $f$  の核を求めなさい.

(筑波大類 26) (固有番号 s261319)

14.8  $\mathbf{R}^2$  における基底  $\chi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\mathbf{R}^2$  における標準基底から, 基底  $\chi$  への取りかえ行列を求めよ.

- (2)  $R^2$  における線形写像  $f$  の標準基底に関する表現行列を,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  とする. このとき,  $f$  の基底  $\chi$  に関する表現行列を求めよ.

(新潟大類 26) (固有番号 s262010)

- 14.9 3次元空間上のベクトル  $\vec{V}$  を  $x$  軸のまわりで角度  $\theta$  だけ回転するとベクトル  $\vec{V}'$  へ変換される. この関係を  $3 \times 3$  行列  $U(\theta)$  を用いて

$$\vec{V}' = U(\theta)\vec{V}$$

と書く. ここで,  $U(\theta)$  は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

で与えられる. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列  $U(\theta)$  の行列式  $\det U(\theta)$  を求めよ.  
 (2) 行列  $U(\theta)$  の逆行列  $U(\theta)^{-1}$  を求めよ.  
 (3) 行列  $K$  を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき,  $K^2, K^3$ , および  $K^4$  を求めよ. さらに, 正の整数  $m$  に対して,  $K^{2m}$  と  $K^{2m-1}$  を求めよ.

- (4) 一般に, 正方行列  $X$  の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される. ここで,  $E$  は単位行列を表し,  $X^0 = E$  である. 問 (3) の結果を利用して,

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ.

(新潟大類 26) (固有番号 s262017)

- 14.10 線形変換  $f: R^3 \rightarrow R^3$  は

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

をみたすとする. ただし  $e_1, e_2, e_3$  は  $R^3$  の標準基底, 即ち

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $R^3$  の標準基底に関する  $f$  の表現行列を求めよ.



(2)  $f$  の像 ( $\text{Im } f$ ) の次元が 2 とする.

(a)  $b$  を  $a$  と  $c$  で表せ.

(b)  $f$  の核 ( $\text{Ker } f$ ) を求めよ.

(金沢大類 26) (固有番号 s262204)

14.11  $P$  を 2 以下の実係数多項式からなる実ベクトル空間とする. 写像  $G: P \rightarrow P$  を,

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  ( $a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ ) に対し  $G(f(x)) = f(x+1) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$  で定義する.

(1)  $G$  は線形写像であることを示せ.

(2)  $P$  の基底  $\{1, x, x^2\}$  に関する  $G$  の表現行列を求めよ.

(富山大類 26) (固有番号 s262308)

14.12  $\mathbf{R}^2$  をユークリッド平面とする. すなわち,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$  に対し, その距離を  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$  で定義したときの距離空間とする.  $f_1, f_2: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  を連続関数とし,  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  を,  $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$  ( $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ ) で定義する. このとき,  $f$  が連続写像であることを示せ.

(富山大類 26) (固有番号 s262309)

14.13 以下の問に答えなさい.

(1) 以下に示す  $x, y, z$  に関する方程式を考える. これが  $x = y = z = 0$  以外の解を持つように, 定数  $k$  の値を定め, 解を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下に示す行列  $A$  により表される線形写像  $f: x \rightarrow Ax$  を考える. 写像  $f$  の核の次元および正規直交化された基底を求めなさい. なお, 写像  $f$  の核は  $\{x \in \mathbf{R}^4 \mid f(x) = \mathbf{0}\}$  ( $\mathbf{0}$  は  $\mathbf{R}^4$  の零ベクトルとする) として定義される.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(三重大類 26) (固有番号 s263102)

14.14  $\mathbf{R}^3$  の基底  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  を考える.

(1) 行列  $[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]$  の逆行列を求めよ.

$T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を, 以下で定める線形変換とする:

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

$$T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

$$T(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3$$

(2)  $\mathbf{R}^3$  の基底  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  に対する  $T$  の表現行列を書け.

- (3)  $T$  の核  $\text{Ker}(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 : T(x) = 0\}$  の基底の 1 つ  $B_1$  を求め、 $\text{Ker}(T)$  の次元を求めよ。ただし、 $B_1$  を構成するベクトルは  $u_1, u_2, u_3$  の線形結合として表せ。
- (4)  $T$  の像  $\text{Im}(T) = \{T(x) : x \in \mathbb{R}^3\}$  の基底の 1 つ  $B_2$  を求め、 $\text{Im}(T)$  の次元を求めよ。ただし、 $B_2$  を構成するベクトルは  $u_1, u_2, u_3$  の線形結合として表せ。
- (5)  $T$  の標準基底に対する表現行列を求めよ。

(神戸大類 26) (固有番号 s263801)

14.15  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $L$  を

$$L = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \right\}$$

とおく。次の問に答えよ。

- (1)  $L$  を含む最小の  $\mathbb{R}^3$  の部分ベクトル空間  $V$  の基底と次元を求めよ。
- (2)  $V$  の直交補空間を求めよ。

(神戸大類 27) (固有番号 s273802)

14.16 3次元実ベクトルが空間  $\mathbb{R}^3$  のベクトル

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し、線形変換  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  が  $f(a) = 2a$ ,  $f(b) = a + 2b$ ,  $f(c) = -c$  を満たすとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $f$  の固有多項式を求めよ。
- (2)  $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 2x\}$  は  $\mathbb{R}^3$  の部分ベクトル空間であることを示せ。
- (3)  $W$  の次元を求めよ。
- (4) ベクトル  $x = xa + yb + zc$  が、無限個の自然数  $n$  に対して不等式

$$\|f^n(x)\| < 2^n \|x\|$$

を満たすための実数  $x, y, z$  の条件を求めよ。ただし  $f^n$  は合成変換  $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ 個}}$  を表し、

$\|\cdot\|$  はベクトルの長さを表すものとする。

(岡山大類 26) (固有番号 s264003)

14.17 2次元ベクトル空間  $\mathbb{R}^2$  において、ベクトル  $x$  と  $y$  の内積を  $x \cdot y$  で表す。一つの単位ベクトル  $u$  を固定して、写像  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を次のように定義する。

$$T(x) = x - 2(u \cdot x)u$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 写像  $T$  は線形写像であることを示せ。
- (2) ベクトル  $x$  が  $u$  と平行であるとき、 $T(x)$  を求めよ。また、ベクトル  $x$  と  $u$  が直交するとき、 $T(x)$  を求めよ。 $u$  を用いない形で表すこと。
- (3) ベクトル  $u$  と直交する単位ベクトルを  $v$  とする。 $x = u + v$  とするとき、 $T(x)$  を  $u$  と  $v$  の一次結合で表し、 $u, v, x, T(x)$  の関係を図示せよ。

(4) ベクトル  $u$  を

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

と表すとき、写像  $T$  の標準基底に関する表現行列  $A$  を求めよ。

(広島大類 26) (固有番号 s264107)

14.18 実数列  $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  全体のなす実ベクトル空間を  $V$  とし、級数  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$  が収束するような実数列  $\{a_n\}$  全体の集合を  $W$  とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $W$  が  $V$  の部分ベクトル空間をなすことを示せ。

(2)  $\{a_n\}, \{b_n\} \in W$  に対して、級数  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$  が絶対収束することを示せ。

(3)  $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$  は  $W$  上の内積であることを示せ。

(4)  $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, b_n = \left(\frac{5}{7}\right)^n$  のとき、 $\{a_n\}, \{b_n\}$  の交角  $\theta$  を求めよ。ただし、内積空間の元  $a, b$  に対してノルムを  $\|a\| := \sqrt{a \cdot a}$  と書くとき、 $a, b$  の交角とは  $a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta$  を満たす実数  $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$  のことである。

(広島大類 26) (固有番号 s264109)

14.19  $a \in \mathbb{R}$  に対し

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定義される  $\mathbb{R}^4$  の線形変換  $f$  を考える。以下の問いに答えよ。

(1)  $f$  の像および核の次元を求めよ。

(2)  $a = 0$  のとき、 $f$  の逆写像に対応する行列を求めよ。

(3) 次の基底に関する  $f$  の表現行列を求めよ。

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(広島大類 27) (固有番号 s274103)

14.20 実数を成分とする  $n$  次正方行列全体の集合を  $M_n(\mathbb{R})$  とおく。  $M_n(\mathbb{R})$  は通常のとスカラー倍で  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間になっている。  $M_n(\mathbb{R})$  の元  $A$  に対し、

$$L(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $L(A)$  は  $M_n(\mathbb{R})$  の部分空間であることを示せ。

(2)  $L(A)$  は行列の積について閉じていること、つまり任意の  $B, C \in L(A)$  に対し、  $BC \in L(A)$  となることを示せ。

- (3)  $n = 2$  として,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  の場合にベクトル空間  $L(A)$  の基底を 1 組求め,  $L(A)$  の次元を答えよ.

(高知大類 26) (固有番号 s264504)

14.21 ベクトル  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$  を次のようにおく.

$$a = (1, 2, -1), b = (3, 2, 1), c = (2, 0, p), d = (2, q, -2)$$

- (1)  $a, b, c$  が 1 次従属になるように  $p$  を定めよ.
- (2)  $a$  と  $d$  が直交するように  $q$  を定めよ.
- (3) (1),(2) で定めた  $p, q$  の値について,  $a, b, c, d$  から生成される部分空間  $W = \langle a, b, c, d \rangle$  の次元  $\dim W$  は何か.

(佐賀大類 26) (固有番号 s264917)

- 14.22 (3, 4) 型行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  に対して, 写像  $f_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $f_A(x) = Ax$  と定める. この

とき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $f_A$  は線形写像であることを示せ.
- (2)  $f_A$  の核  $\text{Ker} f_A$  に属するベクトルをすべて求めよ.
- (3)  $f_A$  の像  $f_A(\mathbb{R}^4)$  の基底を求めよ.
- (4)  $f_A(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  を満たすベクトル  $y$  をすべて求めよ. もしそのような  $y$  が存在しない場合はその理由を述べよ.

(島根大類 26) (固有番号 s265801)

14.23 以下に現れる関数はすべて  $\mathbb{R}^2$  上で  $C^1$  級とする. 写像

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

と二変数関数  $g(u, v)$  の合成を  $F = g \circ f$  と定める. このとき,

$$F(x, y) = (g \circ f)(x, y) = x$$

ならば, 以下の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\begin{pmatrix} g_u & g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(島根大類 26) (固有番号 s265806)

- 14.24 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$  で定まる線形写像  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  について,

以下の問いに答えよ. ただし,  $a$  は実数とする.

- (1)  $A$  の階数  $\text{rank} A$  を求めよ.

- (2)  $A$  の核  $\text{Ker}(f)$  の基底を求めよ.  
 (3)  $A$  の像  $\text{Im}(f)$  の基底を求めよ.

(はこだて未来大類 26) (固有番号 s266301)

## 応用数学

### 15 応用数学

- 15.1  $f$  を周波数とすると、時間  $t$  の関数  $g(t)$  のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

で与えられる。ここで、 $i = \sqrt{-1}$  である。ある関数  $m(t)$  のフーリエ変換を  $M(f)$  とするとき、オイラーの公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  を利用して、 $m(t) \cos(2\pi f_0 t)$  のフーリエ変換が  $M(f - f_0)$  および  $M(f + f_0)$  を用いて表せることを示せ。

(北海道大類 26) (固有番号 s260103)

- 15.2 以下の設問に答えよ。ここで、 $z (= x + iy)$  は複素数であり、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $x, y$  は実数である。なお、途中の計算手順を詳しく記述すること。

- (1)  $z^3 = -8i$  を満たす  $z$  を全て求め、複素平面上に図示せよ。  
 (2) 次の関数が正則か否かを調べよ。  
 (a)  $f(z) = z\bar{z} + 1$  (ただし、 $\bar{z}$  は  $z$  の共役複素数  $\bar{z} = x - iy$ )  
 (b)  $f(z) = \frac{z^2 + 3}{z}$  (ただし、 $z = 0$  を除く)  
 (3) 複素関数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  において、 $u(x, y) = x^2 + y - y^2$  であるとき、 $u(x, y)$  が調和関数であることを示し、 $u(x, y)$  を実部に持つ正則関数  $f(z)$  を求めよ。

(北海道大類 26) (固有番号 s260104)

- 15.3 複素変数  $z = x + iy$  ( $x, y$  は実数) から複素変数  $w = X + iY$  ( $X, Y$  は実数) への写像  $w = f(z)$  を考える。以下の問いに答えよ。ただし、 $i$  は虚数単位とする。

- (1)  $f(z) = z^2$  のとき、 $z$  平面上の各辺の長さが 1 の正方形の領域  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  が  $w$  平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ。また、その領域の面積を求めよ。  
 (2)  $f(z) = i \frac{1+z}{1-z}$  のとき、 $z$  平面上の単位円周  $|z| = 1$  と単位円の内部  $|z| < 1$  がそれぞれ  $w$  平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ。  
 (3)  $f(z) = z + \frac{1}{z}$  のとき、 $z$  平面上の領域  $1 \leq |z| \leq 2$  が  $w$  平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ。また、その領域の面積を求めよ。

(東京大類 26) (固有番号 s260704)

- 15.4 複素関数  $f(z) = \frac{8}{2z^4 + 1 - \sqrt{3}i}$  に対して、以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(z)$  の特異点をすべて求めよ。  
 (2)  $f(z)$  の各特異点  $\alpha$  に対して、その留数  $\text{Res}(\alpha)$  を求めよ。  
 (3) 複素積分  $\int_{|z-1|=\frac{2}{3}} f(z) dz$  を求めよ。ただし、積分路は正の向きに一周するものとする。

15.5 複素関数  $f(z) = \operatorname{Re} z$  ( $z$  の実部) の微分可能性を定義に基づいて調べよ.

(筑波大類 26) (固有番号 s261307)

15.6 3つのベクトルが,  $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$  であるとき,

- (1)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  を求めよ.
- (2)  $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  を求めよ.

(埼玉大類 26) (固有番号 s261402)

15.7 (1)  $x = x_0$  付近で連続な関数  $f(x)$  に対し,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$  が成り立つ関数  $\delta(x)$  がある.  $\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(x)e^{-ixy}dx$  の値を求めよ. ただし,  $i = \sqrt{-1}$  とする.

(2) 関数  $f(x), g(x)$  があり, それぞれ  $F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$ ,  $G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx$  とするとき, 次式  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx \right) e^{-iyz} dz$  が収束するとして, これを,  $F(y)$  および  $G(y)$  を用いて表せ. ただし,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$  とする.

(埼玉大類 26) (固有番号 s261403)

15.8  $i$  を虚数単位とし,  $z = \frac{\sqrt{3}(i - 1) - (1 + i)}{1 + i}$  とおくとき, 以下の各問に答えよ.

- (1)  $z = a + ib$  を満たす実数  $a, b$  を求め, 絶対値  $|z|$  を答えよ.
- (2)  $z = re^{i\theta}$  となる  $r$  と  $\theta$  を求めよ. ただし,  $r > 0$  かつ  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする.
- (3)  $z^n$  が実数となるような最小の自然数  $n$  を求めよ.

(茨城大類 26) (固有番号 s261702)

15.9 4つのベクトル  $\mathbf{a} = (3, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (1, -2, 0)$ ,  $\mathbf{d} = (0, 3, 1)$  について, 次の値を求めよ.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$$

(新潟大類 26) (固有番号 s262002)

15.10  $\phi(x, y, z) = e^{2x^2 - 4y^3 + z^2}$ ,  $\vec{A}(x, y, z) = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$  について, 次の問いに答えよ. ただし,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  は直交座標の単位ベクトルである.

- (1)  $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0}$  を示せ.
- (2) 点  $(1, 1, -1)$  において,  $\phi$  の発散の値を求めよ.
- (3) 点  $(1, 1, -1)$  における  $\phi$  の点  $(-3, 5, 6)$  に向かう方向の方向微分係数を求めよ.
- (4)  $\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$  の値を求めよ. ただし,  $S$  は円柱面  $x^2 + y^2 = 1$  の  $x = 0, y = 0, 0 \leq z \leq 1$  を満たす部分とし,  $\vec{n}$  は  $S$  の単位法線ベクトルとする.

(富山大類 26) (固有番号 s262303)

15.11  $t < 0$  で  $f(t) = 0$  である関数  $f(t)$  のラプラス変換は, 以下のように与えられる.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1)  $f(t) = e^{at}$

(2)  $f(t) = \int_0^t \cos(t - \tau) \cos \tau d\tau$

(福井大類 26) (固有番号 s262426)

15.12 (1) 2つの複素数  $a_1$  と  $a_2$  について, 各々の和, 積がいずれも実数であるとき,  $a_1$  と  $a_2$  が満たすべき条件をすべて示せ.

(2) 複素数  $b$  について,  $b + \frac{2}{b}$  の値が有限の実数であるとき,  $b$  が複素数平面上で描く図形を示せ.

(3) 2つの複素数  $c_1$  と  $c_2$  について, 各々の和, 積がいずれも純虚数であり, かつ  $\left| \frac{c_1}{c_2} \right| = k$  であるとき,  $\frac{c_1}{c_2}$  を  $k$  を用いて表せ. ただし  $k \neq 0$  とする.

(岐阜大類 25) (固有番号 s252604)

15.13 次のスカラー関数  $U(x, y, z)$  について以下の問いに答えよ. ただし,  $a$  は正の実定数とする.

$$U(x, y, z) = \exp[-a(x^2 + y^2 + z^2)]$$

(1) ベクトル  $F = \nabla U$  を求めよ.

(2)  $\nabla \cdot F = 0$  となるとき,  $x, y, z$  が満たす条件をすべて求めよ.

(3)  $\nabla \times F$  を求めよ.

ここで, 演算子  $\nabla$  は次のように定義する.

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大類 26) (固有番号 s263204)

15.14 正の実数  $R$  に対して, 複素平面上の原点を中心とする半径  $R$  の円周上を反時計まわりに 1 周する閉曲線を  $C_R$  とする. 以下の問いに答えよ.

(1)  $R$  を正の実数とし,  $\alpha$  を  $|\alpha| < R$  を満たす複素数とするとき, 複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{z - \alpha} dz$$

を求めよ.

(2)  $n$  を 2 以上の自然数とする. 複素平面における領域  $D$  上で定義された  $n$  個の複素関数  $h_j(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) を考え, 各  $h_j(z)$  は  $D$  上で正則とする.  $D$  上の複素関数  $g(z)$  を  $g(z) = h_1(z)h_2(z) \cdots h_n(z)$  と定義するとき,  $g(z)$  の  $D$  における導関数  $g'(z)$  について

$$\begin{aligned} g'(z) &= h_1'(z)h_2(z) \cdots h_n(z) + h_1(z)h_2'(z) \cdots h_n(z) \\ &\quad + \cdots + h_1(z) \cdots h_{j-1}(z)h_j'(z)h_{j+1}(z) \cdots h_n(z) \\ &\quad + \cdots + h_1(z)h_2(z) \cdots h_n'(z) \end{aligned}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(3)  $n$  を 2 以上の自然数とする. 複素数  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  に対して複素関数

$f(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1z + b_0$  を考える.  $n$  次方程式  $f(z) = 0$  の  $n$  個の複素数解を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  とし,  $R$  は  $|\alpha_j| < R$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) を満たす正の実数とする. このとき複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz$$

を  $b_{n-2}, b_{n-1}$  を用いて表せ.

15.15  $\{f_k(x)\}_{k=1,2,\dots}$  を閉区間  $I(\subset \mathbb{R})$  で定義された実数値連続関数の列とする. 二つの条件を考える.

$$\text{条件 1 : } \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty, \quad x \in I$$

$$\text{条件 2 : } \max_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^m f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

条件 1 が満たされるとき, 関数項級数  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  は  $I$  において絶対収束するという. 条件 2 が満たさ

れるとき, 関数項級数  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  は  $I$  において一様収束するという. 以下の問いに答えよ.

(1)  $f(x) = |x|$  ( $x \in [-\pi, \pi]$ ) のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた級数  $s(x)$  が  $[-\pi, \pi]$  において絶対収束することを示せ.

(3) (1) で求めた級数  $s(x)$  が  $[-\pi, \pi]$  において一様収束することを示せ.

15.16 3つのベクトル  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  について, 以下の問いに答えよ.

(1)  $a \cdot (b \times c)$  を求めよ.

(2)  $a \times (b \times c)$  を求めよ.

15.17 (1) 次の周期  $2\pi$  の関数  $f(x)$  のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi), \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  であることを示せ.

(3)  $t > 0$  で定義された関数  $f(t)$  のラプラス変換を  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  とする. 以下の問いに答えよ.

(a)  $a$  を定数とすると,  $\mathcal{L}[e^{at}](s)$  を求めよ. また,  $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a)$  を示せ.

(b)  $\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$  が成り立つことを示せ. また, これを用いて  $F(s) = \log\left(\frac{s+1}{s}\right)$  の

ラプラス逆変換を求めよ.

15.18 方程式  $z + \frac{1}{z} = 1$  を満たす複素数  $z$  について, 次の各問いに答えよ. ただし, 答えは  $x+yi$  の形 ( $x, y$  は実数,  $i$  は虚数単位) で表せ.

(1)  $z$  をすべて求めよ.



(2) (1) で求めた  $z$  に対して,  $z^6$  を求めよ.

(宮崎大類 26) (固有番号 s265304)

15.19  $xyz$  直交座標系の原点を  $O$  とする. この空間内に 2 点  $A(1, 2, 0)$ , 点  $P(a, b, 0)$  がある. 以下の問いに答えなさい. ただし, 点  $P$  は 2 点  $O, A$  を通る直線上にはないものとする.

(1)  $\vec{OA}$  と  $\vec{OP}$  のなす角度を  $\theta$  としたとき,  $\cos \theta$  を求めなさい.

(2) 2 点  $A, P$  を通る直線の方程式を求めなさい.

(3)  $\vec{OA}$  と  $\vec{OP}$  の外積を求めなさい.

(4) 三角形  $OAP$  の面積を求めなさい.

(鹿児島大類 26) (固有番号 s265413)

15.20 3 つのベクトル  $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $c = \begin{bmatrix} 2 \\ k \\ 3 \end{bmatrix}$  について, 以下の問いに答えよ.

(1)  $a \cdot (a \times b)$  を求めなさい. ただし,  $a \cdot b$  は内積,  $a \times b$  は外積である.

(2)  $a, b, c$  が線形従属 (1 次従属) となるとき,  $k$  の値を求めなさい.

(3) 点  $(0, 0, 0)$  を通り,  $a, b$  で張られる平面の方程式を求めなさい.

(首都大類 26) (固有番号 s265901)

15.21 ベクトル  $a = (1, 2, 2)$ ,  $b = (2, 3, 1)$  に対して, 内積  $(a, b)$  と外積  $a \times b$  を求めよ.

(和歌山大類 26) (固有番号 s266501)

15.22 複素関数について, 次の各問いに答えなさい.

(1) 関数  $w = z + \frac{1}{z}$  に対して  $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $w = u + iv$  とおくと,  $u, v$  を  $r, \theta$  で表しなさい.

(2) 関数  $f(z)$  が領域  $D$  で正則であるとき,  $\operatorname{Re} f(z)$  が定数ならば  $f(z)$  も定数であることを証明しなさい.

(3) 積分路  $C: |z| = 2$  の向きは反時計回りとして, 次の積分値を求めなさい.

$$\int_C \frac{2z+1}{z(z-3)} dz$$

(和歌山大類 26) (固有番号 s266508)

15.23 次の関数のフーリエ変換を求めなさい.

(1)  $f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(2)  $f(t) = e^{-|t|}$

(3)  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

(和歌山大類 26) (固有番号 s266509)

# 確率統計

## 16 確率統計

16.1 ある行列に並んでいる人の待ち時間  $t$  は確率密度関数

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

に従うものとする。ただし、 $\lambda$  は正の実数である。以下の問いに答えよ。

- (1) 待ち時間が  $t$  以下である確率  $F(t)$  を求めよ。
- (2) 待ち時間の平均  $\mu$  と分散  $\sigma^2$  を求めよ。
- (3) 十分な数の観測の結果、待ち時間の平均が  $T$  であったとする。待ち始めてから時間  $\tau$  だけ経過したとき、残りの平均待ち時間を求めよ。

(東京大類 26) (固有番号 s260702)

16.2 ある製品の不良率を  $p$  とする。

- (1)  $p = 0,01$  である時、100 個の製品の中の不良品が 1 個以内である確率を、2 項分布を用いて求めよ。(  $0.99^{99} \approx 0.37$  とする。 )
- (2)  $p$  について全く見当がつかない時、確率 0.95 で不良率の推定の誤差を 0.02 以下にしたい場合を考える。この時、標本の大きさを最も大きくする  $p$  の推定値  $\hat{p}$  はいくらか。また、その時の標本の大きさ  $n$  を求めよ。ここで、 $\hat{p}$  は正規分布に従うと仮定する。(添付の正規分布表を利用すること。)

(筑波大類 26) (固有番号 s261305)

16.3 さいころを振って出た目の数だけマスを進む「すごろく」を考える。後戻りや、さいころの出た目の数をこえて進むことはないものとする。すごろくは振り出しの隣から、マスに 1, 2,  $\dots$  と番号付けがされており、その順にマスを進んでいく。

- (1) さいころを 1 回振ったときに進めるマスの数の期待値を求めよ。
- (2) 振り出しから始めて、さいころを何回か振った後に、マス  $n$  に止まる確率を  $n = 1, 2, 3, 4$  のそれぞれの場合において求めよ。
- (3) 振り出しから始めて、さいころを何回か振った後に、マス  $n(1 \leq n \leq 6)$  に止まる確率を  ${}_p C_q$  を用いて表し、その理由を説明せよ。ただし、 ${}_p C_q$  は  $p$  個の要素の中から  $q$  個の要素を取り出す組合せ数を表す。

(筑波大類 26) (固有番号 s261306)

16.4  $n$  を 2 以上の自然数とする。袋の中に 1, 2,  $\dots$ ,  $n$  と書いたボールが 1 つずつある。ここから 2 個取り出して、出た順にその数字を  $X, Y$  とする。また、 $X$  と  $Y$  の大きい方を  $Z$  とする。以下の問いに答えなさい。

- (1)  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して確率  $P(X = k)$ 、および期待値  $E(X)$  を求めなさい。
- (2)  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して確率  $P(Z = k)$ 、および期待値  $E(Z)$  を求めなさい。

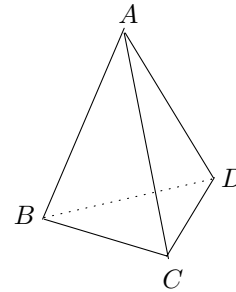
(長岡技科大類 25) (固有番号 s252101)

16.5 袋の中に赤玉  $m$  個と白玉  $n$  個が入っている. この袋からでたらめに 1 個の玉を取り出す. 取り出した玉は元に戻さない. この操作を繰り返し行ったとき, 先に赤玉がなくなる確率を  $P(m, n)$  とする. 下の問いに答えなさい.

- (1)  $P(1, 2)$  を求めなさい.
- (2)  $P(2, 3)$  を求めなさい.
- (3) 一般の  $m, n$  に対して,  $P(m, n)$  を  $m, n$  で表しなさい.

(長岡技科大類 26) (固有番号 s262101)

16.6 右図のように, 四面体  $ABCD$  には, 三角形の面が 4 つあり, 辺が 6 つある. ここで, 各辺を独立に, 赤か青の色に等確率で (つまり, 確率  $1/2$  で) 塗ることを考える. 3 辺が同じ色で塗られた三角形を, 単色三角形と定義して, 以下の問いに答えよ.



- (1) すべての辺が青色で塗られる確率を求めよ.
- (2) 三角形  $ABC$  が単色三角形となる確率を求めよ.
- (3) 三角形  $ABC$  と  $ACD$  のどちらか, あるいは両方が単色三角形となる確率を求めよ.
- (4) 四面体  $ABCD$  の中に単色三角形が 2 個のみ現れる確率を求めよ.

(豊橋技科大類 26) (固有番号 s262702)

16.7  $N$  人に呼びかけて行事を実施する. この行事は, ある日時に  $N$  人のうちの  $n$  人以上が参加できる場合に実施できるとする. 呼びかけられた人が参加できる確率は, 行事を実施する日時によらず  $p$  である. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $p = \frac{1}{3}$ ,  $n = 2$ ,  $N = 3$  のとき, ある日時に行事が実施できる確率を求めよ.
- (2) 行事を実施する日時として 2 つの候補を設定する.  $p = \frac{1}{3}$ ,  $n = 2$ ,  $N = 3$  のとき, いずれの日時においても行事が実施できない確率を求めよ.
- (3) 行事を実施する日時の候補数を  $k$  とする.  $n = 1$  のとき, 少なくとも 1 回は行事が実施できる確率を  $N, p, k$  を用いて表せ.

(豊橋技科大類 27) (固有番号 s272703)

16.8 ジョーカーを除く 52 枚のトランプから 1 枚ずつ 2 枚のカードを取り出すとき, (1) ~ (4) の確率を求めなさい. ただし, 取り出したカードはもとにもどさないものとする.

- (1) 1 枚目, 2 枚目ともに  $A$  (エース) である確率
- (2) 1 枚目に引いたカードが  $A$  (エース) である確率
- (3) 2 枚目に引いたカードが  $A$  (エース) である確率
- (4) 1 枚目に引いたカードは伏せたままにして, 2 枚目に引いたカードが  $A$  (エース) であったとき 1 枚目も  $A$  (エース) である確率

(三重大類 26) (固有番号 s263111)

16.9 異なる 4 つの数が与えられている. これらを各々 4 回ずつ用いて  $4 \times 4$  行列  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ) をつくる. すべての可能な行列がつくられる確率が等しいとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 得られた行列のすべての行が, それぞれ異なる 4 つの数から成っている確率を求めよ.

- (2) 得られた行列のすべての行, すべての列, 及び対角成分 (すなわち  $a_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )) が, それぞれ異なる 4 つの数から成っている確率を求めよ.

(京都大類 26) (固有番号 s263305)

16.10 1 から 6 の目が等確率で出るさいころに関する以下の設問に答えよ.

- (1) 1 つのさいころを 5 回振るとき, ちょうど 3 種類の目が出る場合は何通りあるかを求めよ.  
 (2) 区別のできない 5 つのさいころを同時に振るとき, ちょうど 3 種類の目が出る場合は何通りあるかを求めよ.  
 (3) さいころを振って 3 以上の目が出たら 4 点を, 2 以下の目が出たら 1 点を得る. さいころを  $n$  回振った時までに得た点数の合計が偶数である確率を  $P_n$  とする (ただし,  $n$  は 0 以上の整数とし,  $P_0 = 1$  とする). このとき, 以下の (a) ~ (c) に答えよ.

(a)  $P_1, P_3$  を求めよ.

(b)  $P_{n+1}$  を  $P_n$  で表せ.

(c)  $P_n$  を求めよ.

(大阪大類 26) (固有番号 s263503)

16.11  $N$  を自然数とする. ボタンを押下すると 1 から  $N$  までの整数の中から一つの数字をランダムに表示する機械がある. ボタンを離すと表示された数字は消える. それぞれの数字は等確率で表示される. ボタンの押下を  $n$  回いい表示された数字を  $X_1, \dots, X_n$  とし, これらは互いに独立な確率変数とする.  $T = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  とおき,  $T$  を用いて  $N$  を推定したい. 事象  $A$  の生起確率を  $P(A)$  と書く. 以下の問いに答えよ.

(1)  $P(T \leq t) = \{P(X_1 \leq t)\}^n$  ( $t = 1, \dots, N$ ) を示せ.

(2)  $P(T = t)$  ( $t = 1, \dots, N$ ) を求めよ.

(3) 期待値  $E(T)$  が次式で与えられることを示せ.

$$E(T) = N - \sum_{t=1}^N \left(\frac{t-1}{N}\right)^n$$

(4) 次式を示せ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(T)}{N} = \frac{n}{n+1}$$

(大阪大類 26) (固有番号 s263507)

16.12 相関係数とはどのようなものか説明するとともに, その結果を用いる場合に注意すべき点を 2 つあげよ.

(宇都宮大類 26) (固有番号 s266103)

16.13 コインを 3 回投げたとき, 表の出る回数を  $X$ , 表と裏の出る回数の差の絶対値を  $Y$  とする. このとき, 次の各問いに答えなさい.

(1)  $X$  と  $Y$  が独立であるかどうかを理由とともに答えなさい.

(2)  $X + Y$  の確率分布表を求めなさい.

(3)  $XY$  の平均と分散を求めなさい.

(和歌山大類 26) (固有番号 s266510)